

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXII

No. 5

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- C. U. ARIËNS KAPPERS: "The frontal fissures on the endocranial casts of some Predmost men". p. 552. (With one plate).
- JAN DE VRIES: "Eine bilineare Kongruenz von Kegelschnitten", p. 562.
- C. J. BAKKER and P. ZEEMAN: "The magnetic separation in the spectrum of ionised Krypton (Kr II)", p. 565. (With one plate).
- JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS: "The law of the para-magnetisation of a crystal and the law of the paramagnetic rotatory dispersion.", p. 578.
- JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS: "Notes on the law of the paramagnetic rotation of tysonite and tables of the paramagnetic rotatory power of some crystals", p. 590.
- G. VAN RIJNBEEK and Miss L. KAISER: "Experimental contribution to the knowledge concerning the segmental innervation of the abdominal muscles in the dog. (2nd Communication). The M. Obliquus Externus", p. 597.
- A. SMITS: "Die Pseudo-komponenten des Wasserstoffs". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN), p. 603.
- A. SMITS et Mlle C. H. MAC GILLAVRY: "Expériences sur l'activité du plomb provenant du toit de l'Observatoire à Paris". (Communicated by Prof. P. ZEEMAN), p. 610.
- H. G. DU BUY und ERICH NUERNBERGK: "Ueber das Wachstum der Koleoptile und des Mesokotyls von Avena sativa unter verschiedenen Aussenbedingungen". (Vorläufige Mitteilung). (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT), p. 614. (With two plates).
- J. W. A. VAN KOL: "Ueber den Komplex der kubischen Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drie gegebene Geraden je einmal treffen". (Communicated by Prof. HENDRIK DE VRIES), p. 625.
- M. EUWE: "Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 633.
- J. M. BURGERS: "On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion" II. (Communicated by Prof. P. EHRENFEST), p. 643.
- B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN: "Improved instrument for the simultaneous determination of the static pressure, the magnitude and the direction of the velocity of fluids." (Communicated by Prof. P. EHRENFEST), p. 658.
- S. H. BERTRAM: "Some analytical remarks on the vitamin A". (Communicated by Prof. H. ZWAARDEMAKER), p. 664.
- N. H. SWELLENGREBEL and W. H. DOORNBOS: "On the so-called "daily turnover" of the Anopheline population in resting-places and its bearing on the evaluation of the Anopheline incidence, to test the effect of antilarval measures.". (Communicated by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER), p. 669.
- Corrigendum, p. 679.

Anatomy. — *The frontal fissures on the endocranial casts of some Predmost men.* By C. U. ARIËNS KAPPERS.

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

In preceding communications I described the fissures on the frontal lobes of *Pithecanthropus* and of some inferior paleolithic or Neanderthal men. In this paper I shall deal with those fissures, as far as they are visible, on the endocranial casts of some superior paleolithic men especially those of Predmost, who by some authors are considered as belonging to the solutrean period, by most others to the preceding or aurignacian period.

MATIEGKA¹⁾, as well as SZOMBATHY and SALLER, considers them as being more or less related to the Cro-Magnon race.

Whatever may be the exact relationship of the Predmost race with other superior paleolithic races, all these races, are considered as not being related to Neanderthal men.

It is generally accepted that during and after the last or Würm glacial period the latter had become extinct.

Only few authors suppose that even up to our time offsprings or variations of the Neanderthalrace may occur in the Australian aboriginals. Most of the present human paleontologists share BOULE's view that this race though it may have been still partly contemporary — at least in France — with the early or aurignacian superior paleolithic men and with the negroids of Grimaldi, gradually disappeared and that our continent was then populated with races that were physically as well as mentally very different from the Neanderthalrace. Though some authors suppose that transitions between these races occur, BOULE emphatically states "aucun type humain actuel ne saurait être considéré comme un descendant direct, même modifié, du type de Neanderthal" (l.c. p 246).

For the somatic characteristics of the superior paleolithic races in general I refer to the descriptions in different text books and papers on this subject. As far as concerns their mental superiority I may mention that by their mural paintings, ivory and horn sculptures and clay modellings they show a much higher culture than the Neanderthal race, while by their evident totemism as appears from their art and by their refined death cult, strongly contrasting with the lack of burial or very simple burial (La Chapelle, La Ferrassie, Moustier) of Neanderthal men, they showed elaborate conceptions.

The origin of the superior paleolithic men is unknown. It may be stated however that in contrast to the rather uniform skeletal type of Neanderthal men the superior paleolithic race represent different races. So the

¹⁾ MATIEGKA, The skull of the fossil man Brno III and the cast of its interior. Dr. ALES HRDLICKA, Anniversary volume published by the anthropological institute of Charles University, Prague, 1929.

negroid relics of Grimaldi are very different in their physical status from the skeletons found in other superior paleolithic strata and also among the later reindeer men different races may be distinguished: the Cro-Magnon type being different from the Chancelade type that was even supposed to be related to the Eskimos (TESTUT, SOLLAS¹⁾), en opinion controverted by KEITH²⁾.

More or less contemporary with the Cro-Magnon race of France were the men whose relics are found in Moravia, some near Madlec (Lautsch), three near Brünn, four near Predmost, where MASCHKA and ABSOLON discovered their skeletons.

It is of this people that I examined the endocranial casts, since casts of other superior paleolithic skulls were either not accessible or do not show distinct fissural impressions.

Like the endocranial casts of modern and Neanderthal men those of the upper paleolithic period show great variations in the degree of fissural expression. So among Neanderthal men the impressions on the Moustier and La Chapelle cast are not nearly as distinct as e.g. on both sides of the Düsseldorf cast and on the left side of the La Quina cast. Apparently the degree of fissural expression is not generic but rather individual and perhaps influenced by age, or by different conditions of the meninges and intrameningeal fluid.

An advantage of the Predmost casts is that the fissures on the frontal lobes are fairly well expressed and that no less than four endocranial casts of this people were at my disposition.

The casts examined were of the Predmost skulls III, IV, 9 and 10. I am much indebted to Profs. ABSOLON and SUK for procuring me these casts.

They are practically mesencephalic (Predmost III ♂: 75.6; IV ♀ 74.2; 9 ♂ 75.2; 10 ♀ 78.6) their average length-width index being 75.9. The endocranial indices of my cast of Combe Capelle is even less (72.4), the cranial indices³⁾ of the Cro-Magnon and Chancelade men are 73.7 and 72, Madlec 70.9, Brünn I, II, III: 72.4; 67.6; 70.2, (MATIEGKA, l.c.).

The endocranial index of the Neanderthal men shows also great variations, but the average is higher than with superior paleolithic casts.

So while the *La Quina* woman was distinctly dolichencephalic (73.8 (ANTHONY⁴⁾), the *Moustier* cast has a length-width index of 76, the *Düsseldorf* and *La Chapelle*⁵⁾ man, according to ANTHONY, are 78.3 and 78.8. The index of the *Rhodesia* cast is also 78.8. According to my own measures the *Düsseldorf* man has even a somewhat greater endocranial index viz. 79.6 equal to that of the *Gibraltar* man (79.5) which according to ANTHONY⁴⁾ has even an index of 81.6,

1) See BOULE *Les hommes fossiles*; MASSON & Cie, Paris, 1921, (p. 296).

2) KEITH: *Man*, Dec. 1925 p. 186.

3) Only the skull of Placard is nearly subbrachycephalic (BOULE l.c. p. 289).

4) ANTHONY. *l'Encéphale de l'homme fossile de la Quina*. Bull. et Mém. de la Soc. d'Anthropologie de Paris. 1913.

5) BOULE et ANTHONY. *l'Encéphale de l'homme fossile de la Chapelle aux Saints* l'Anthropologie. Vol. 22, 1911.

Among the *Krapina* skulls brachycephalic indices are found, and the endocranial cast of POEBABA is certainly brachycephalic (I tax this to be about 84.5).

The small endocranial index of the Predmost seems mostly due to a greater length, rarely to a decrease in width.

The Predmost casts are remarkable for their greater general and occipital height indices, while also their frontal lobe is less sloping than in Neanderthal men.

The temporal length has increased, the temporal depth decreased.

Endocran. Indices ¹⁾	Pithecanthropus	Pitdown rec. KEITH	Inf. paleolithic men			Sup. paleolithic men		Average inf. paleolithic men	Average sup. paleolithic men
			Rhodesia	La Chapelle	La Quina	Combe Capelle	Predm. III (IV) 10		
General height	0.400	0.498	0.450	0.480	0.465	0.507	0.516	0.465	0.513
Occipit. height	0.938	1.465	1.110	0.990	1.10	1.502	1.455	1.07	1.467
Temporal depth	?	0.137	0.142	0.153	0.153?	0.121	0.144	0.149	0.138
Temporal length	0.753	0.711	0.766	0.773	?	0.743	0.787	0.769	0.772
Frontal length	0.344?		0.332?	0.306?	?	0.350		0.319	(0.350)
Frontal height	0.422?		0.450?	0.437?	?	0.450?		0.444	(0.450)

The capacity of the Predmost casts ²⁾ examined is 1568 ccm (Predmost III), 1308 ccm (IV), 1432 ccm (9) and 1430 ccm (10). The capacities of other superior paleolithic cast are 1415 (Combe Capelle), 1590 ccm (Cro-Magnon) and 1530 ccm (Chancelade; LEE and PEARSON). Their average capacity (1476 ccm) does not differ much from that of the Neanderthal men although the race itself was considerably taller (180 cm Predmost, 182 cm Cro-Magnon) ³⁾ than the Neanderthal race (160 cm BOULE), where a maximum capacity of 1600 ccm is found. Thus, while the cephalization in Neanderthal men may have been slightly larger than in our present race (DUBOIS) ⁴⁾ it was in the superior paleolithic men of Cro-Magnon and Predmost the same as with present races.

The casts examined show the peculiarity that their frontal lobe is rather blunt at its ventral part, more so than most Neanderthal casts (fig. 1).

The *rostrum orbitale* probably was well pronounced. Only a part of it is expressed in N^o. IV and N^o. III (see the adjoining plate). In N^o. 9 and 10 most of it fails as the whole orbital part of the skull was lacking here. In the cast of Combe Capelle the rostrum however is well developed.

¹⁾ Cf. ARIENS KAPPERS. Indices for the anthropology of the brain etc. These Proceedings, Vol. 30, 1927.

²⁾ As none of these casts is fully complete the capacities mentioned are a little too small.

³⁾ Only the Chancelade man establishes an exception, having a length of 150 cm.

⁴⁾ See DUBOIS, Proceedings of the Kon. Akademie van Wetenschappen, Vol. 23, 1921.

A lunate sulcus is nowhere obvious. N^o. III is remarkable for showing a fairly deep recession right in front of the lambda suture which though less

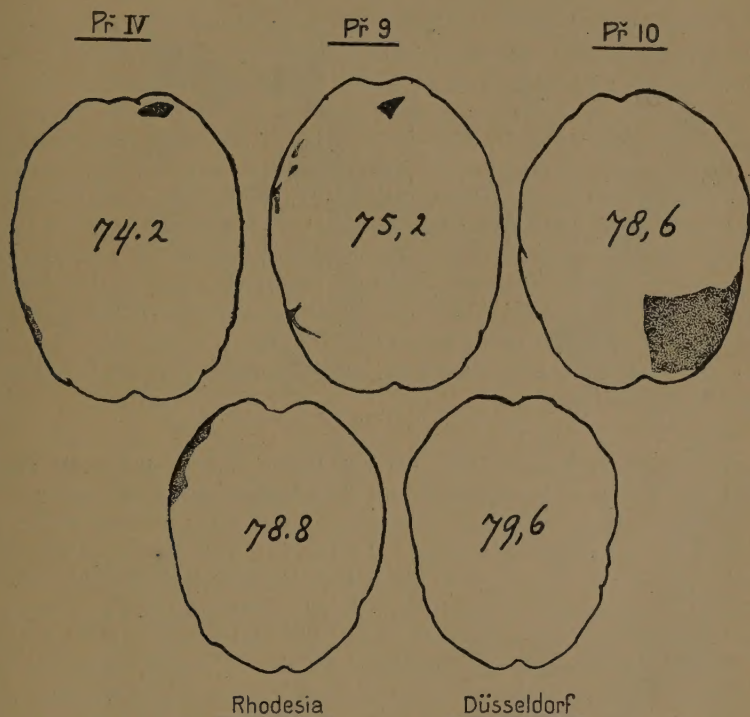


Fig. 1. Horizontal tracings of three superior paleolithic casts (Pr. IV, 9 and 10) and two inferior paleolithic casts.

sharp reminds us of the condition occurring in the Rhodesian Neanderthal men (also occasionally found in recent men).

These indentations, however, have nothing to do with lunate sulci as I already emphasized in one of my former papers but apparently are due to a thickening or deeper position of the posterior edge of the parietal bone in comparison with the upper edge of the occipital squama ¹⁾.

Only on the left occipital lobe of Predmost III ♂, at a distance of about 1.1 cm behind the lambda suture a deepening of the occipital lobe is observed that perhaps may be an indication of a sulcus lunatus. A similar

¹⁾ For the different factors that may act a part in these and other variations of the skull I refer to BOLK's paper: Over de verschillende soorten van schedelmisvorming bij den mensch. Verslagen van het Genootschap voor Natuur-, Genees- en Heelkunde, Jan. 27, 1915, Amsterdam.

indication is seen on the left occipital lobe of Predmost 10, also at a distance of about 1.3 cm behind the *lamba* suture.

On the *frontal lobes* the indications of the *superior frontal sulcus* (11) are rather poor. The best expression of it is seen on the left hemisphere of Predmost III ♂ where the anterior part of this sulcus is indicated by three fissurets (fig. 2). On the right hemisphere of this cast similar fissurets occur (see plate). On the other casts this sulcus is still less pronounced.

All the casts show the tendency of the anterior frontal surface to form one or two transverse fissures at the ventral end of the superior frontal sulcus, thus establishing a parallel bridging convolution (*p*) extending between the fronto-marginal sulcus (9) and the medio-ventral edge of the hemisphere. These *fronto-parallel convolutions* (*p*) are most obvious in frontal or semi-frontal aspects (see plate) and are probably correlated with the greater bluntness and increase of the frontal pole (cf. fig. 1).

I also found this parallel convolution clearly expressed in recent European and Mongolian brains.

The *midfrontal sulcus* (7), so clearly indicated on both sides in the ape man and on several hemisphere of my Neanderthal casts, is well indicated only in Predmost IV (both hemispheres) and III (left hemisphere). Nowhere can I trace it to a precentral sulcus (5). This may be correlated with the fact that the precentral sulcus itself is rarely distinct. Traces of it occur in the Predmost IV specially on the left hemisphere. But even here a distinct connection of the midfrontal sulcus with that trace fails (see fig. 2).

On the left hemisphere of Predmost IV the midfrontal sulcus has a connection (7c) with the inferior frontal (4), equally seen in Predmost 9 (right hemisphere), and indicated perhaps by *c'* on the right hemisphere of Predmost IV and on the left of Predmost 9. On the latter, the midfrontal is only expressed by discontinuous pieces.

In Predmost III (1.) the midfrontal (7) is connected by a transverse fissure with the superior frontal fissure (11).

In none of the casts does the ventral end of the mid frontal sulcus show a direct continuation into the fronto-marginal (9).

The *frontalis inferior* (4) is very distinct and rather classic in its form on the *left hemisphere of Predmost IV*, where the origin only of this groove from the precentralis, fairly constant in recent brains, fails, probably on account of the failing impression of the lower part of the precentral sulcus. Tracing its course on the left hemisphere of this cast from behind its connection (7c) with the midfrontal is evident.

Behind this connection, between 7c and 5, a small but distinct dimple is observed, which may represent an intermediate fosset (8) (c.f. this relation with the same in the La Quina casts left hemisphere, where a

dorsal branch of 4 also extends, though for a short distance only, in the direction of 7 and where also a fosset 8 occurs behind this branch).

Continuing in frontal direction and inclining to the ventral margin of the

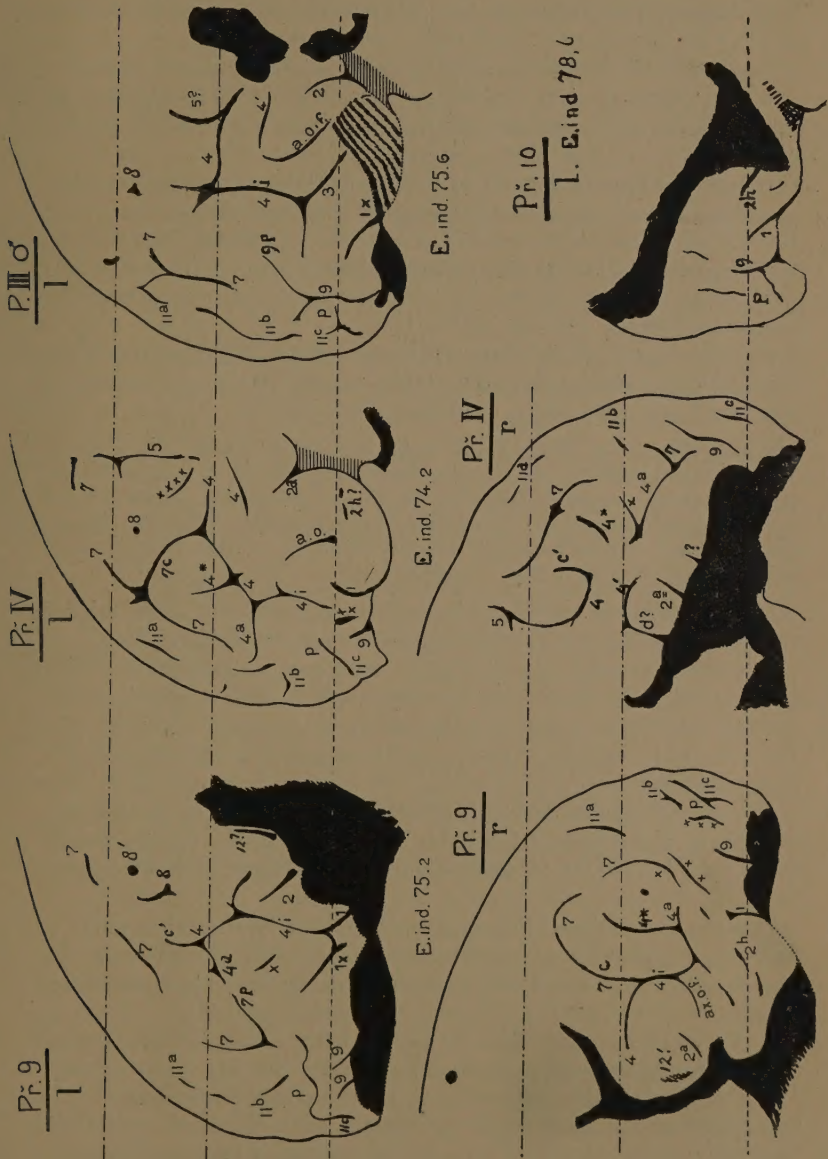


Fig. 2. Frontal fissures on the endocranial casts of Predmost III ♂, IV, 9 and 10.

lobe, the inferior frontal (4) in Predmost IV (1.) shows a second branch (4*) in dorso-caudal direction. Then the sulcus divides in two branches. One branch, the ramus inferior (4i) runs downward, ending immediately in front of the subfrontal sulcus (1). The other branch, the ram. anterior (4a), proceeds into the direction of the medial margin, crossing the anterior part of the midfrontal sulcus.

Apparently the ram. anterior is well developed here and even passes the midfrontal which I never saw on casts of Neanderthal men, where the ramus anterior s. frontalis inferioris is usually poorly pronounced and not as long.

Also on the *right hemisphere of Predmost IV* the inferior frontal sulcus is well expressed and a connection with the precentral sulcus (5) is indicated. A ramus inferior however is not expressed on the right lobe and the ramus anterior (4a) is discontinuous with the main part of 4. Frontally this branch dichotomizes but the dichotomy may as well represent a connection with the midfrontal sulcus (7).

An analogous condition is observed on the left side of Predmost 9, where a small ramus anterior (4a) of the inferior frontal nearly connects with a ramus posterior (7p) of the midfrontal sulcus (7).

A peculiarity on both hemispheres of Predmost IV is the presence of a sulcus (4') underneath the hindpart of the inferior frontal and parallel to it, a feature which I also occasionally observed in Dutch and Chinese brains. One might call this groove a *frontalis inferior accessorius*. It is also indicated on Predmost III ♂. When this accessory groove is present in actual brains it is sometimes difficult to say which (4 or 4') should be considered as the primary inferior frontal sulcus.

On the *left hemisphere of Predmost III ♂* the caudal part of the inferior frontal sulcus is much the same as on the left lobe of Predmost IV.

The rest of this fissure (4) is different, being represented on Predmost III only by an inferior branch (4i) that apparently finishes in a sulcus *axialis operculi orbitalis* (3), extending frontally about as far as does the subfrontalis (1*), that has rather a great horizontal extension on this side of the Predmost III ♂.

A ram. anterior s. frontalis inferioris is not indicated, on the left hemisphere of Predmost III ♂. This simple form of the inferior frontal sulcus reminds us of the condition found on the right side of the Rhodesian casts. It also occasionally occurs in recent brains.

In front of the descending branch of the inferior frontal however a posterior branch (9p) of the fronto-marginal sulcus (9) points in the direction of the frontalis inferior thus marking an approach to a connection between the fronto-marginal (9) and the inferior frontal (4).

As the fronto-marginal sulcus (9) belongs to the system of 7 this relation is more or less analogous to what is seen on the *left hemisphere of Predmost 9*, where the midfrontal sulcus (7) has a posterior branch (7p) that almost reaches the short anterior branch (4a) of the inferior frontal sulcus. The inferior branch (4i) is well developed on the left hemisphere

of Predmost 9 and reminds us of the relation on the La Quina cast, where it also connects with the subfrontal (1).

On the right hemisphere of Predmost 9 the relations of the inferior frontal sulcus are very different from the left. In one respect they resemble those in Predmost IV (1.), in so far as 4 has a distinct connection (7c) with the midfrontal.

Besides in front of this an ascending branch occurs (4*) reminding us of 4* in Predmost IV (1.). Of the anterior branch of the inferior frontal only an indication exists (4a). On this lobe of Predmost 9 the inferior frontal sulcus has two distinct ventral branches of the character of a *s. axialis operculi frontalis* (a.o.f.) ending between 2a and 2h, the ascending and horizontal anterior branches of the fossa Sylvii, limiting a distinct operculum frontale (vide infra).

A *sulcus axialis operculi frontalis* is also indicated on the left hemispheres of Predmost IV and III ♂.

The *fronto-marginal fissure* (9) is indicated on all the casts, being most evident in Predmost III, where this fissure shows a dichotomy, the posterior branch of which (9p) runs in the direction of the frontalis inferior (4). Between the anterior branch of the fronto-marginal sulcus, not specially numbered in fig. 2, and the lower part of the superior frontal (11c) the *fronto-parallel convolution* (p), mentioned above, extends between the stem of the fronto-marginal sulcus and the medial wall of the hemisphere.

As already stated above a similar convolution (p) between 11b and 11c is observed on the left hemispheres of Predmost IV, 10 and 9 and also on the right hemisphere of the latter (see plate). This is a remarkable feature in all these Predmost casts. Similar relations are observed in recent brains but not till now in Neanderthal casts. As stated above the occurrence of this convolution p may be correlated with the blunt form of the ventro-frontal margin of the frontal lobe (fig. 1), and at the same time may be an expression of a greater growth in this region, also expressed in modern brains by the tendency of the ventro-medial edge of the frontal lobe to form transverse foldings on the anterior lateral as well as on the anterior medial part of the superior frontal convolution.

The *s. subfrontalis* (1) is best expressed on the left hemisphere of Predmost IV, the only one where the whole operculum orbitale is well preserved. In all the other hemispheres a smaller or larger part of the operculum orbitale is failing or not well expressed (III ♂). On the left of Predmost 10 that part in which this sulcus runs is also preserved.

In Predmost IV the sulcus has a semicircular course, the dorsal end of which turns backwards as is also slightly indicated on the right hemisphere of Predmost 9. On the left hemisphere of the latter the subfrontal fissure connects with an additional groove in front of it (1 X).

In Predmost III ♂ and 10 the subfrontal sulcus (1× and 1) runs more horizontally than it does in the two other casts.

As far as concerns the *rami anteriores fossae Sylvii* this much can be said with certainty that there is more evidence of them than in the Neanderthal casts. Notwithstanding the imperfect state of the opercular region in most casts, there is an indication of such branches in all casts.

On the *right lobe of Predmost 9* there clearly are two branches: a horizontal (2h) and an ascending branch (2a). Whether on the *left hemisphere of Predmost IV* two *rami anteriores* are indicated is doubtful. The most distinct one (2a) is the ascending branch. I doubt whether the small dimples 2h? on the left lobe of Predmost IV are due to a sulcus.

On the *left hemisphere of Predmost 10* of which only the lower part of the frontal lobe is preserved an indication of a *ramus anterior horizontalis* f. *Sylvii* may exist (2h). The region of 2a fails on this side.

In the other hemispheres most of the operculum fails and only one of these branches is indicated. It is very difficult to say whether this is a single *ramus anterior* f. *Sylvii*, or a *ramus anterior ascendens* f. *Sylvii*, e.g. on the left hemispheres III ♂ and 9. On the right hemisphere of Predmost IV the conditions are difficult to explain in consequence of the failing of the larger part of the opercular region. Here three fissures (d?, 2a and ?) are observed underneath the *frontalis inferior accessorius* (4'). The most caudal one is a ventral branch of the *frontalis inferior accessorius* and might be a diagonal sulcus (d?).

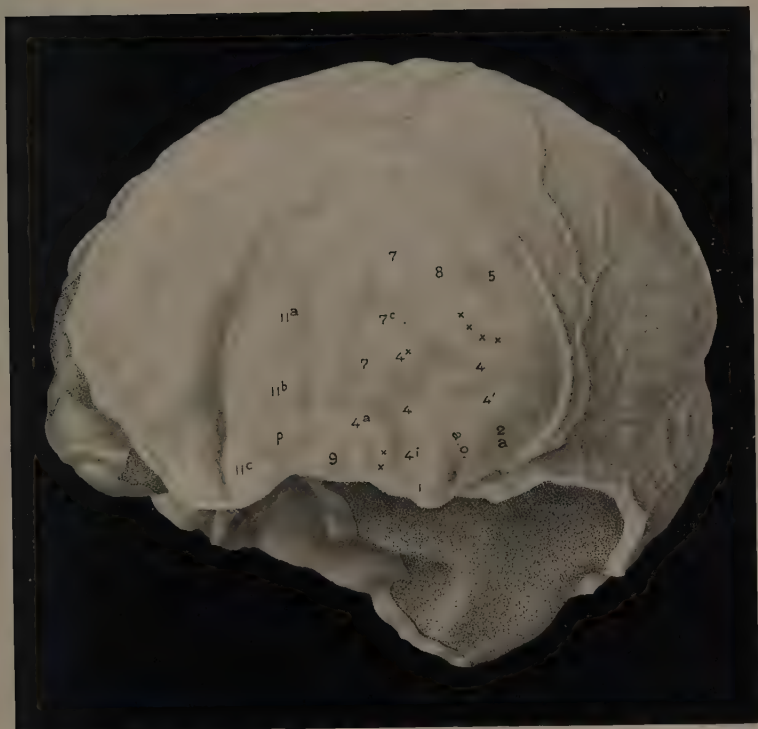
The second one, 2a, probably is an impression of a *ram. anterior ascendens* f. *Sylvii*, as on the right side of Predmost 9. What the small dimple (?) is I do not know. I have seen, however, horizontal branches running as high up the convexity in recent brains.

Altogether it is striking that indications of frontal Sylvian branches are more pronounced here than on Neanderthal casts, and that, in one vase at least (Predmost 9, right hemisphere), probably also in two other cases (Predmost III and IV), also a f. *axialis frontalis* is indicated.

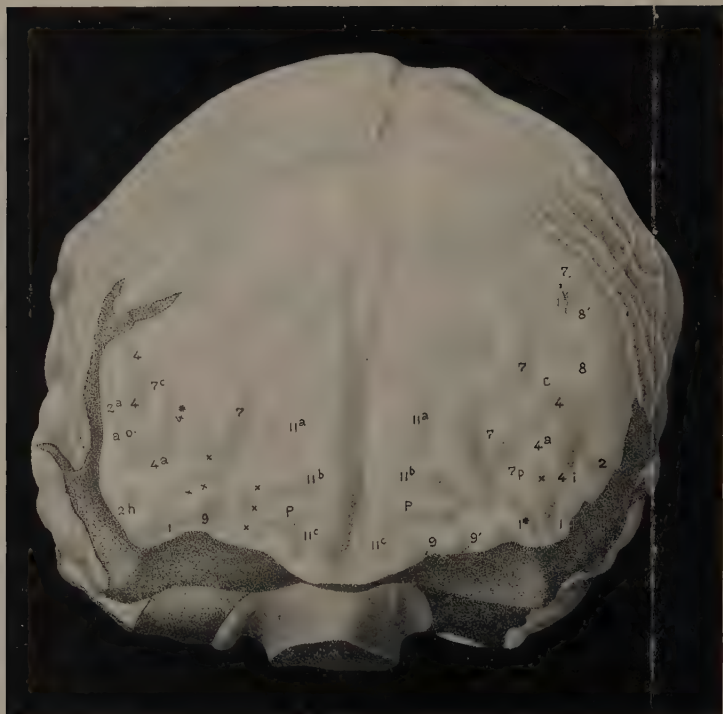
It is strange that no indication of an inferior continuation of the precentral sulcus is visible here nor a distinct vestige of a *subcentralis anterior*. The only impression that reminds me of the latter is 12? in Predmost 9 (right hemisphere).

Also is it wholly impossible to say any thing about the ventral end of the *centralis*, although the central sulcus according to MATIEGKA (l.c.) is indicated on Brunn III, where also the inferior and midfrontal sulci are reported to be evident.

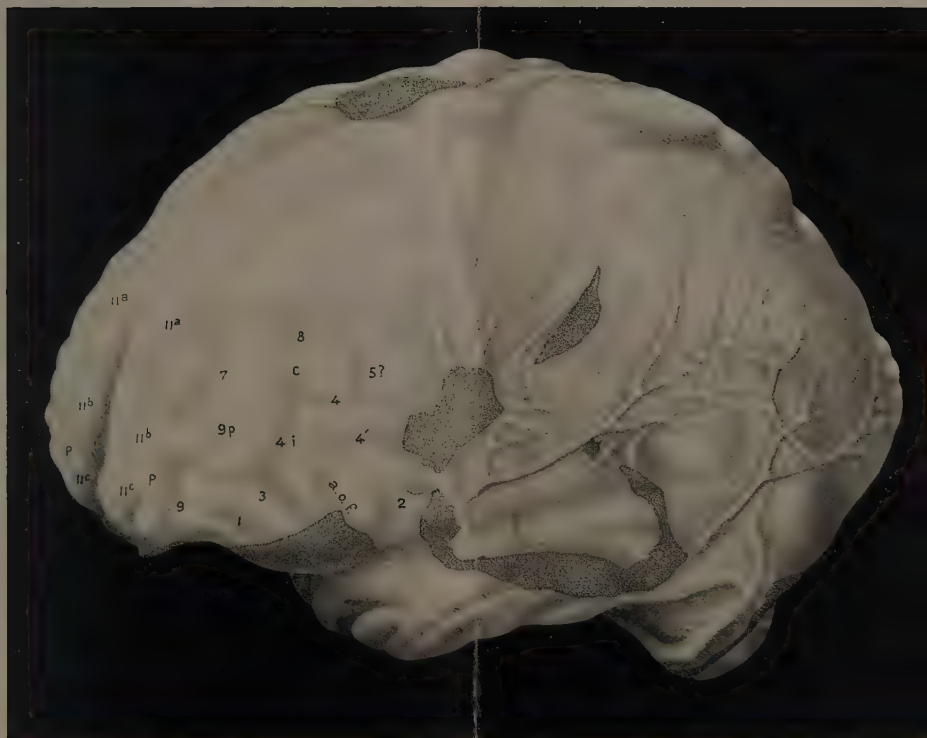
The *orbital sulci* were probably well developed in Predmost men, but as in these casts most of the orbital surface is failing little can be said of this. Only on the left side of Predmost IV, the frontal half of BROCA's



Semi-frontal aspect of the endocranial cast of Predmost IV.



Frontal aspect of the endocranial cast of Predmost 9. Note the fronto-parallel convolutions (*p*) on both sides.



Approximately lateral aspect of the endocranial cast of Predmost III ♂.

scissure en *H* is well expressed and independent of the very pronounced s. subfrontalis (1; see fig. 2).

Resuming my results I may say:

10. that the Predmost casts show few impressions of the superior and midfrontal sulci, specially caudally, while impressions of the precentralis are very faint or fail. A subcentralis anterior is nowhere indicated with certainty, nor even a part of the centralis.

20. The inferior frontal system is well expressed. In addition to its ramus inferior a ramus anterior is strongly developed in Predmost IV (on both sides). In Predmost 9 it is indicated on the left hemisphere and tends to connect with the midfrontal. The ram. anterior s. frontalis inferioris seems to be better developed than in any of the Neanderthal men.

30. A constant feature in all the Predmost casts examined, is the occurrence of a fronto-parallel convolution between 11*b* and 11*c*, running parallel to the ventral margin of the frontal lobe, as is often observed in recent brains.

40. Indications of the rami anteriores f. Sylvii are observed on all hemispheres. On one hemisphere, Predmost 9 (right side) and perhaps on Predmost IV (left side), where the whole or most of the opercular region is present, both rami may be indicated, on the other hemispheres only one. On the left lobe of Predmost 10 this may be a horizontal ramus, in Predmost IV (right side) an ascending branch. In III and 9 (left side) it is difficult to say whether the branch indicated is an anterior ascending one or a single ramus anterior. A single ramus anterior f. *S.* may occur in Predmost 9 (left side).

50. A s. axialis operculi frontalis is indicated in Predmost III (*l.*) and 9 (*r.*), probably also in IV (*l.*).

The better development of the ramus anterior s. frontalis inferioris, the more frequent impressions of anterior branches of the fossa Sylvii and the evidence of a sulc. axialis operculi frontalis give these casts a more differentiated aspect than the Neanderthal casts, from which they also differ in having greater sagittal height and temporal length indices and smaller temporal depth indices.

By these features the Predmost casts approach those of recent men.

Finally, I want to express my thanks to our scientific artist Mr. CHR. VLASSOPOULOS for his accurate drawings, reproduced on the adjoining plate.

Mathematics. — *Eine bilineare Kongruenz von Kegelschnitten.* Von
Prof. JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

§ 1. Die Kegelschnitte k^2 durch den festen Punkt A , welche die vorgegebene rationale Raumkurve β^4 in vier Punkten B treffen, bilden eine Kongruenz.

Es gibt vier Systeme von nodalen k^2 . Jede Trisekante t von β^4 bildet einen k^2 mit einer durch A gelegten Sekante s ; die Ebenen dieser k^2 umhüllen einen quadratischen Kegel, die Punkte ts bilden eine rationale Raumkurve vierter Ordnung (System Σ).

Der Punkt A trägt drei Bisekanten b_1, b_2, b_3 der β^4 . Jede Ebene durch b_1 enthält einen nodalen k^2 , welcher aus b_1 und einer zweiten Bisekante b_1^* besteht. Offenbar bilden die Geraden b_1^* eine kubische Regelschar β_1^3 , mit doppelter Leitgerade b_1 (System Σ_1). Analog entsprechen die Systeme Σ_2 und Σ_3 den Geraden b_2 und b_3 .

§ 2. Es sei g eine durch A gelegte Gerade; die k^2 , welche g zweimal treffen, bilden ersichtlich ein Monoid M . Ist g eine n -fache Gerade von M , so ist dies eine Fläche der Ordnung $n+2$, und die Anzahl der einfachen Geraden von M , welche in A zusammen treffen, beträgt $(n+2)(n+1)-n^2$. Nun trifft g zunächst zwei Trisekanten t , denen zwei Sekanten s entsprechen; ausser diesen enthält M noch b_1, b_2, b_3 . Demnach ist $(n+2)(n+1)-n^2=5$, und $n=1$, wonach M ein kubisches Monoid ist.

Das Monoid M^3 ist bestimmt durch seinen Doppelpunkt M , zwei Punkte von g und 13 Punkte von β^4 . Ein beliebig gewählter Raumpunkt trägt somit einen Kegelschnitt der Kongruenz. Da eine Gerade i.A. Sehne eines k^2 ist, bilden die k^2 eine bilineare Kongruenz.

§ 3. Um eine Abbildung der Kongruenz auf die Punkte einer Ebene α zu erhalten, wähle ich zwei Geraden s_1 und s_2 als Leitlinien einer bilinearen Stralkongruenz und betrachte als Bild eines k^2 die Spur K der Sehne von k^2 , welche s_1 und s_2 trifft.

Die Spuren S_1 und S_2 von s_1 und s_2 sind Ausnahmepunkte; S_1 ist Bild sämtlicher k^2 , welche AS_1 zweimal treffen, somit ein Monoid M_1^3 bilden.

Auch die Spur S_3 der Transversale a durch A über s_1, s_2 ist singulärer Bildpunkt; die in S_3 abgebildeten k^2 liegen auf einem Monoid M_3^3 .

Die Gerade S_1S_2 ist das Bild des in der Ebene AS_1S_2 liegenden

Kegelschnitts, k_3^2 . Der Kegelschnitt k_1^2 in der Ebene As_1 wird auf die Gerade $S_1 S_3$ abgebildet; analog ist $S_2 S_3$ das Bild des in der Ebene As_2 liegenden k_2^2 .

§ 4. Die Ebenen des Systems Σ (§ 1) erzeugen auf s_1 und s_2 zwei Punktreihen in zweizweideutiger Verwandtschaft. Demnach bilden die entsprechenden Transversalen von s_1, s_2 eine Regelschar vierter Ordnung, welcher a als doppelte Erzeugende angehört. Das Bild von Σ ist somit eine *trinodale Kurve* τ^4 , mit Doppelpunkten S_k .

Die Ebenen durch b_1 bestimmen projektive Punktreihen auf s_1 und s_2 . Das Bild des Systems Σ_1 ist daher ein Kegelschnitt β_1^2 , der die Punkte S_k enthält. Analog werden Σ_2 und Σ_3 auf β_2^2 und β_3^2 abgebildet; diese Kegelschnitte durchsetzen sich noch in dem Bildpunkte des in der Ebene $b_2 b_3$ liegenden k^2 .

Die Punkte K , welche den Kurven τ^4 und β_1^2 gemein sind, entsprechen den Trisekanten, welche b_1 auf β^4 treffen.

§ 5. Die Bildkurve λ des Systems A der k^2 , welche eine Gerade l schneiden, hat *dreifache Punkte* in S_k , denn l trifft das Monoid M_k^3 dreimal. Weil l i. A. den Kegelschnitt k_3^2 nicht trifft, enthält die Gerade $S_1 S_2$ keinen Bildpunkt K von λ ; die Bildkurve von A ist demnach eine *rationale* λ^6 , mit dreifachen Punkten S_k . Sie hat einen Doppelpunkt als Bild des in der Ebene Al liegenden k^2 .

Zwei Kurven λ^6 haben 9 Punkte K gemein; das System A bildet folglich eine Fläche A^9 .

Die k^2 , welche β^4 in einem vorgegebenen Punkt B treffen, bilden ein *kubisches Dimonoid* Δ^3 , mit torsaler Gerade AB , denn diese bildet einen k^2 mit der Trisekante, welche sie ausserhalb β^4 trifft.

Demnach ist β^4 *dreifache Kurve* von A^9 .

Weil λ^6 und β_k^2 drei Punkte K gemein haben, sind b_1, b_2 und b_3 *dreifache Geraden* von A^9 ; diese Fläche enthält daher noch neun Bisekanten b^* .

Weil λ^6 und τ^4 sechs Punkte K gemein haben, enthält A^9 sechs Trisekanten t ; zwei von diesen treffen l ; ihnen entsprechen zwei Sekanten durch A . Ausser diesen enthält A^9 die in der Ebene Al liegenden Sekanten. Der k_2 in Al ist *Doppelkurve*, A *sechsfacher Punkt*.

Die Ebenen des Systems A umhüllen eine Kegelfläche *dritter Klasse*. Zwei Flächen A^9 haben gemein β^4, b_1, b_2, b_3 und $9 k^2$.

§ 6. Die Ebenen um AB bestimmen mit s_1 und s_2 eine quadratische Regelschar, wonach das System der durch B gelegten k^2 in einen um $S_1 S_2 S_3$ beschriebenen Kegelschnitt δ^2 abgebildet wird. Die Kurven δ^2 bilden ein System mit *Index vier*, denn die durch einen Punkt K bestimmte Ebene enthält vier Punkte B .

Es sei μ^2 irgend eine durch S_1, S_2 und S_3 gelegte Bildkurve. Zwei

auf ihr liegende Punkte K bestimmen zwei k^2 deren Ebenen sich in einer Geraden m , durch A , schneiden. Die k^2 , welche m zweimal treffen, bilden ein Monoid M^3 , und ihre Ebenen erzeugen projektive Punktreihen auf s_1, s_2 , wonach M^3 auf einen Kegelschnitt abgebildet wird, der die zwei Punkte K und die drei Punkte S enthält, also mit μ^2 identisch ist.

Die den Geraden durch A entsprechenden Systeme M^3 werden folglich auf das Netz $[\mu^2]$ abgebildet.

§ 7. Die Punktreihe (K) auf einer Geraden r der Bildebene ist das Bild einer Fläche sechsten Grades, R^6 .

Weil r einen Kegelschnitt μ^2 zweimal trifft, umhüllen die Ebenen der k^2 von R^6 eine quadratische Kegelfläche; diese berührt die Ebenen As_1, As_2 und $AS_1 S_2$.

Jeder quadratischen Kegelfläche, welche diese drei Ebenen berührt, entspricht ein System von k^2 , welches auf einer Fläche R^6 liegt, und deren Bild aus den Geraden $S_k S_l$ und einer Geraden r besteht.

Wenn der Kegel jene drei Ebenen nicht berührt, erzeugen seine Berührungsebenen mit s_1, s_2 eine Regelschar vierten Grades, wonach das berührende System auf eine *trinodale* q^4 abgebildet wird.

Weil diese Kurve mit einer Kurve λ^6 sechs Punkte K gemein hat, liegen die entsprechenden k^2 auch jetzt auf einer Fläche sechsten Grades.

Den Schnittpunkten von r mit β_k^2 entspricht, dass die Bisekanten b_k Doppelgeraden von R^6 sind. Diese Fläche enthält daher sechs Bisekanten b^* ; auf ihr liegen vier Trisekanten t und vier Sekanten s ; sie entsprechen den Punkten $r\tau^4$.

§ 8. Eine Ebene φ schneidet ein Monoid M^3 in einer Kurve k^3 , von welcher vier Tangenten die Gerade AB treffen. Hieraus erhellt, dass M^3 vier k^2 enthält, die φ berühren. Die Bildkurve des Systems Φ ist folglich eine φ^8 , mit vierfachen Punkten S_k .

Da sie eine Kurve λ^6 in 12 Punkten K schneidet, bilden die eine Ebene berührenden k^2 eine Fläche Φ^{12} , mit vierfacher Kurve β^4 und vierfachen Geraden b_k ; denn φ^8 hat mit einem μ^2 vier Punkte K gemein.

Weil zwei Kurven φ^8 sich in 16 Punkten K durchsetzen, gibt es sechszehn k^2 , welche zwei Ebenen berühren.

Physics. — *The magnetic separation in the spectrum of ionised Krypton (Kr II).* By C. J. BAKKER and P. ZEEMAN.

(Communicated at the meeting of May 25. 1929.)

1. *Introduction.*

After the discovery of Argon by Lord RAYLEIGH and RAMSAY (1895) RAMSAY and TRAVERS (1898) investigated more exactly the rests, which remain after evaporation of fluid air. After purifying from O_2 and N_2 those rests, brought again in gasform, gave when they were investigated spectroscopically besides the Argon lines a number of very strong, unknown lines. The gas, to which those lines belong was called *Krypton*.

RAMSAY and TRAVERS have only given orientative measurements of the Krypton lines, but after them many investigators have occupied themselves with the investigation of the spectroscopic behaviour and the measuring of wavelengths ¹⁾. RUNGE (1899) was the first, who observed that Krypton just as CROOKES discovered with Argon can give two different spectra, dependent on the discharge method. Condensed discharges give rise to a spectrum rich in lines, called by BALY ²⁾ the second spectrum and which according to the theory of BOHR, arises from ionised states of the Krypton atom.

L. BLOCH, E. BLOCH and G. DÉJARDIN ³⁾ investigated the spectra of the ionised inert gases by means of electrodeless discharges, while ABBINK and DORGELO ⁴⁾ performed investigations in the far ultra violet by means of a vacuum spectrograph. With those wavelengths measurements KICHLU ⁵⁾ has succeeded in giving a partial analysis of the spectrum of ionised Krypton (*Kr II*).

In this paper we give a first communication on the investigation of the magnetic separation in the spectrum of ionised Krypton (*Kr II*). This investigation is directly related to the investigations on the other ionised inert gases (*Ne II* and *Ar II*) performed in this laboratory ⁶⁾.

¹⁾ See H. KAYSER. Handbuch der Spectroscopie. Band 5.

²⁾ E. C. C. BALY: Phil. Transact. A **202**, 183, 1903.

³⁾ L. BLOCH, E. BLOCH and G. DÉJARDIN: Annales de Physique 2. 462, 1924.

⁴⁾ J. H. ABBINK and H. B. DORGELO: Zeitschr. f. Phys. **47**, 221, 1928; Physica 7, 343, 1927.

⁵⁾ P. K. KICHLU: Proc. Royal Soc. London **120** A, 643, 1928.

⁶⁾ Concerning *Ne II* see:

T. L. DE BRUIN: Versl. Kon. Ak. Amsterdam **36**, 502, 1927 and **37**, 340, 1928; Proceedings **31**, 2, 1928 and **31**, 593, 1928; Zeitschr. f. Phys. **44**, 157, 1927 and **46**, 856, 1928.

C. J. BAKKER: Versl. Kon. Ak. Amsterdam **37**, 890, 1928; Proceedings **32**, 515, 1929. Concerning *Ar II* see:

T. L. DE BRUIN: Versl. Kon. Ak. Amsterdam **37**, 340, 1928 and **37**, 553, 1928; Proc. **31**, 593, 1928 and **31**, 771, 1928; Zeitschr. f. Phys. **48**, 62, 1928 and **51**, 108, 1928.

C. J. BAKKER, T. L. DE BRUIN and P. ZEEMAN: Versl. Kon. Ak. Amsterdam **37**, 562, 1928 and **37**, 840, 1928; Proc. **31**, 780, 1928; Zeitschr. f. Phys. **51**, 114, 1928 and **52**, 299, 1928.

2. Theoretical termscheme of *Kr II*.

According to the theory of the periodic system of BOHR—SOMMERFELD the simply ionised Krypton atom possesses in his unexcited state 5 electrons in a $4p$ orbit. According to considerations of PAULI and WENTZEL such a configuration will give the same deepest lying term arising from the binding of one electron in a $4p$ orbit, and this will be an "inverted" $2P$ term.

The other terms can be deduced theoretically by binding to the core successively a $4d$, $5s$, $5p$ electron and by using the structure rules of HEISENBERG, LANDÉ and HUND.

Table 1 gives the terms deduced for the basic term $3P$. Possibly there are also terms arising from the metastable states $1S$ and $1D$.

TABLE 1. Krypton II (deep terms).

Electronic configuration						Terms (basic term $3P$)	
1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d	5s 5p	Quartet	Doublet	
2	2 6	2 6 10	2 5			P	
2	2 6	2 6 10	2 4 1		F D P	F D P	
				1	P	P	
				1	D P S	D P S	

3. Experimental terms¹⁾

In this communication we will give the magnetic separations of spectrallines, which are combinations of the terms arising from the $5s$ and $5p$ electron. Almost all those terms are known by the analysis of the spectrum by KICHLU (loc. cit.); it seems only necessary on account of the magnetic separation to change somewhat the interpretation of the $5p$ terms of KICHLU. Table 2 includes in the first column the relative termvalues, in the third column the interpretation of KICHLU and in the fourth those of the authors. Figure 1 shows a survey of the situation of the analogous p -terms for ionised Neon, Argon and Krypton, namely of the terms arising from the $3p$ -electron for *Ne II*, from the $4p$ -electron for *Ar II* and from the $5p$ -electron for *Kr II*. In this figure the distance $4P_3-4P_1$ is choosen as unity of drawing for getting a clear figure.

The term 77047.0 is classified by KICHLU as $4S_2$ on account of the combinations with $5s\ 4P_3$, $4P_2$ and $4P_1$. However the magnetic separations of the combinations with the terms $5s\ 4P_3$ and $5s\ 4P_2$ do not answer the expectation; it seems certain that a coincidence of 2 terms exists here.

The combination of this term 77047.0 with the term $5s\ 4P_3$ is one of the strongest lines of the spectrum and this line splits up in the magnetic

¹⁾ For typographical simplicity the inner quantum number j is everywhere replaced by the whole number $j + 1/2$.

field in a strong "Pseudo-triplet" as one must expect for a combination $4P_3-4D_4$. Figure 1 shows that the termdifference $5p\ 4D_4-5p\ 4D_3$ for *Kr II* is very small.

The term 70834.2 has surely the inner quantumnumber $j=2$ and is interpreted as $2D_2$.

The term 73726.4 is interpreted as $5p\ 2P_1$, however the combination with $5s\ 2P_1$ does not occur in the list of wavelengths of BLOCH c.s. ¹⁾. At the same time it will appear that this term shows a very strong anomalous g -value.

TABLE 2.

Relative Termvalues	Term- difference	KICHLU	Authors	g -values	
				LANDÉ	Obs.
100000.0	2263.8 2511.0	$b\ 4P_3$	$5s\ 4P_3$	1.60	1.60
97736.2		$b\ 4P_2$	$5s\ 4P_2$	1.73	1.54
95225.2		$b\ 4P_1$	$5s\ 4P_1$	2.67	2.64
94353.7	2527.6	$b\ 2P_2$	$5s\ 2P_2$	1.33	1.52
91826.1		$b\ 2P_1$	$5s\ 2P_1$	0.67	0.70
78904.3	362.8 884.8	$c\ 4P_3$	$5p\ 4P_3$	1.60	1.60
78541.5		$c\ 4P_2$	$5p\ 4P_2$	1.73	1.67
77656.7		$c\ 4P_1$	$5p\ 4P_1$	2.67	—
77047.0	288.1 2310.5 1781.7	$c\ 4S_2$	$5p\ 4D_4$	1.43	1.43
76758.9		$c\ 4D_3$	$5p\ 4D_3$	1.37	1.23
74448.4		$c\ 4D_2$	$5p\ 4D_2$	1.20	1.26
72666.7		—	$5p\ 4D_1$	0.00	0.00
72710.8		$c\ 2D_3$	$5p\ 2D_3$	1.20	1.34
70834.2	1876.6 — 1033.8	$c\ 2P_1$	$5p\ 2D_2$	0.80	1.33
72692.6		$c\ 2P_2$	$5p\ 2P_2$	1.33	1.26
73726.4		—	$5p\ 2P_1$	0.67	1.78
71107.3		$c\ 2D_2$	$5p\ 4S_2$	2.00	1.54
70466.3		$c\ 2S_1$	$5p\ 2S_1$	2.00	1.50

¹⁾ Calculated $5s\ 2P_1-5p\ 2P_1\ \nu = 18099.7$. There is present a line with $\nu = 18101.1$. This difference seems too large.

It is remarkable that the combination $5s\ ^2P_1-5p\ ^2P_2$ ($\lambda = 5224.98$
 $\nu = 19133.5$) is not present in the list of wavelengths of BLOCH c.s.

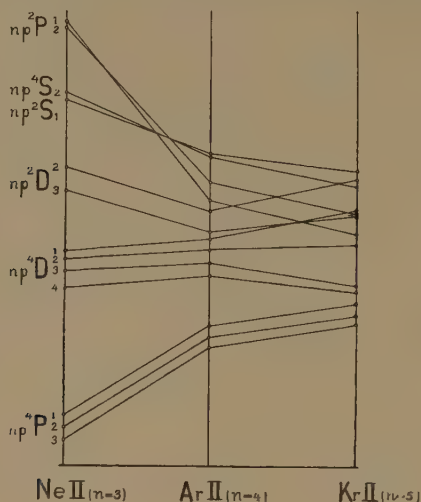


Fig. 1.

Table 3 includes the combinations and intercombinations of the terms arising from the $5s$ and $5p$ electron. The wavelengths and intensities are taken from L. BLOCH, E. BLOCH and G. DÉJARDIN, l.c.

4. Experimental part.

Figure 2 shows the mounting that has been used for the investigation of the magnetic separation. The *magnet* is a large water cooled WEISS-electromagnet, made by the engine factory "Oerlikon" (Zürich). It is operated on a current of 100 Ampères and with the used distance of the endplanes of the poles the magnetic field amounts to about 41000 Gauss.

The poles of the magnet are enclosed by a copper vacuum box ¹⁾. The conical plugs to which the electrodes are attached, are made of ebonite and ground to fit into openings into the box. The gas discharge passes between two circular aluminium plates just covering the pole tips of the magnet. The discharge passes thus parallel to the magnetic field and is concentrated with well chosen gas pressure entirely to the central part of the field, which increases the intensity of the light very much. Just as for Neon and Argon l.c. we used an uncondensed alternating current of high potential furnished by a transformer that operated on $\frac{1}{2}$ K.W.

Before the expensive Krypton was led into the vacuum space, electrolytically produced Hydrogen was led during many hours through the

¹⁾ See BACK—LANDÉ: ZEEMAN-effekt und Multipletstruktur Springer, Berlin, 1925.

TABLE 3.

Int.	λ I. Å.	ν_{vacuum}	Termcombination	Int.	λ I. Å.	ν_{vacuum}	Termcombination
1	5752.97	17377.5	5 s $^2P_1 - 5 p \ ^4D_2$	12	4355.50	22953.0	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4D_4$
2	5690.34	17568.8	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^4P_1$	4	4301.55	23240.9	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4D_3$
4	5681.93	17594.8	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^4D_3$	4	4300.51	23246.5	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^4S_2$
3	5308.66	18831.9	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4P_3$	6	4292.94	23287.5	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4D_2$
5	5208.33	19194.7	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4P_2$	3	4250.60	23519.5	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^2D_2$
3	5022.39	19905.3	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^4D_2$	2	4185.13	23887.4	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^2S_1$
1	4978.82	20079.5	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4P_1$	5	4145.13	24117.9	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^4S_2$
5	4846.58	20627.4	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^2P_1$	5	4098.74	24390.9	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^2D_2$
3	4825.19	20718.8	5 s $^2P_1 - 5 p \ ^4S_2$	4	4037.81	24758.9	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^2S_1$
3	4811.73	20776.8	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^4D_2$	6	3994.83	25025.3	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^2D_3$
5	4765.72	20977.3	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4D_3$	6	3991.93	25043.5	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^2P_2$
3	4762.42	20991.9	5 s $^2P_1 - 5 p \ ^2D_2$	2	3987.78	25069.6	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4D_1$
7	4738.98	21095.7	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4P_3$	5	3912.54	25551.6	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4D_2$
4	4680.39	21359.8	5 s $^2P_1 - 5 p \ ^2S_1$	5	3754.20	26629.3	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^4S_2$
5	4658.86	21458.5	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4P_2$	0	3666.00	27269.9	5 s $^4P_2 - 5 p \ ^2S_1$
2	4650.15	21498.7	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^2P_1$	2	3663.42	27289.1	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^2D_3$
5	4619.13	21643.1	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^2D_3$	1	3661.00	27307.2	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^2P_2$
3	4615.28	21661.1	5 s $^2P_2 - 5 p \ ^2P_2$	4	3460.09	28892.7	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^4S_2$
5	4436.81	22532.4	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^2P_2$	3	3427.70	29165.7	5 s $^4P_3 - 5 p \ ^2D_2$
5	4431.68	22558.5	5 s $^4P_1 - 5 p \ ^4D_1$				

box while regularly discharges were switched on for removing as much as possible the impurities, stuck on the magnetic poles and on the inside of the box. After that the Hydrogen passage was finished and yet pumped for an hour, during which time the vacuum is so high, that with low voltage no discharge passes. There after the Krypton gas was led into the box and the spectrum of one filling remained satisfactorily constant during the time of exposure that varied between 4 and 5 hours. After the exposure the gas could be collected in a large vacuum reservoir.

The exposures are made by means of the *stigmatic grating mounting* ¹⁾ of the laboratory. The slit *S* is placed in the focus of a concave mirror *Sp*.

¹⁾ RUNGE and PASCHEN: Wied. Ann. 61, 641, 1897. P. ZEEMAN used this mounting since 1900 for many investigations.

MEGGERS and BURNS: Sc. Pap. Bur. of Standards N^o. 441, Vol. 18, 1922.

The mirror sends a parallel beam to the large concave ROWLAND grating *T*. The photographs are made in the 2nd order, which is a brilliant order of the used grating. In the neighbourhood of the normal of the grating where the photographic plates are placed the dispersion is about 2.4 \AA . The grating used has 14438 lines to the inch and a width of 5 inches. (Originally 6 inch but one inch is covered on account of disturbances.)

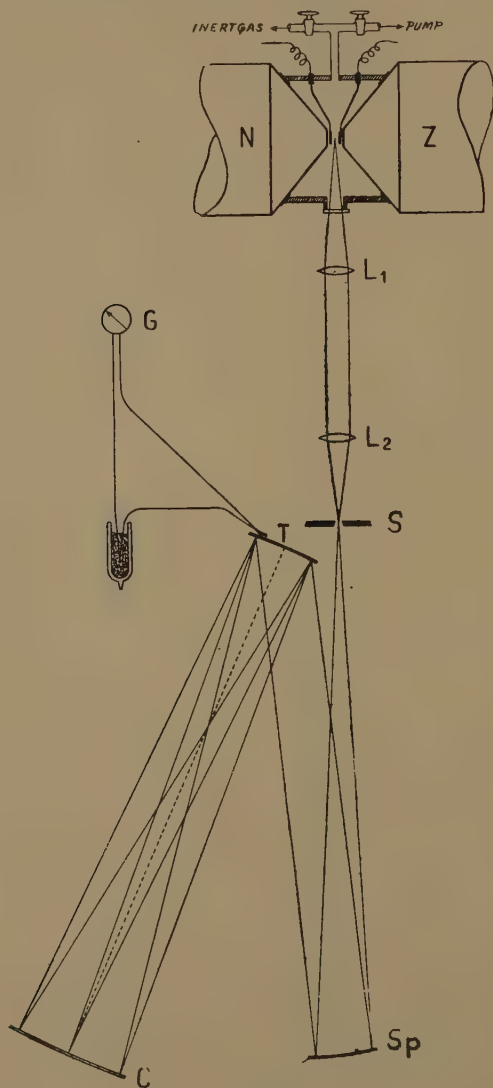


Fig. 2.

Grating mounting and magnet are placed upon a large bloc made of concrete (weight 250.000 K.G.) free of vibrations.

In the grating room the temperature can be hold constant till upon $0^{\circ}.1$ by means of a automatically regulating ether thermometer which, via a relais breaks or cuts in the electric current in heating spirals¹⁾. The grating does not follow those temperature swingings of $0^{\circ}.1$ and remains constant to $0^{\circ}.01$ during the exposures. This is controlled by means of a thermo couple and galvanometer G with mirror reading. One pole of the thermo couple is put against the backside of the grating. (See figure 2.)

We have measured the intensity of the magnetic field in the first place with the aid of the magnetic separations of the well known Zn-triplet 4811, 4722 and 4680. After a Krypton exposure the electrodes for the gas discharge were therefore replaced by a so called "vacuum trembleur" constructed in this laboratory by VAN DER MARK²⁾ provided with one Zn-electrode and one Tungsten electrode.

In consequence of a weak sputtering of the Aluminium electrodes used for the gas discharge the first lines of the principal series of the Al spectrum $\lambda = 3961.5$ and 3944 appeared on our plates. The magnetic separations of those lines are fine and can be used for intensity measurement of the field.

5. The magnetic separation. Normal and anomalous g-values.

According to the theory of LANDÉ³⁾ the magnetic separation of a classified spectral line, arising from the combination between two known terms, can be calculated. The distances of the magnetic components to the place of the original line are given by the equation :

$$\Delta \nu = (m'g' - m''g'') \cdot o$$

in which : $o = \frac{e}{m} \cdot \frac{H}{4\pi c}$ is the normal splitting distance and unit of notation for magnetic separations.

m is the magnetic quantum number, which has $2j + 1$ values for a term with the inner quantum number j namely $m = j, j - 1, \dots, -j$. Each of these values marks a magnetic sublevel, while only levels with $\Delta m = 0$ or ± 1 combine. ($\Delta m = 0$, π -component, $\Delta m = \pm 1$ σ component).

The factor g in the equation is the well known splitting factor of LANDÉ, which can be calculated directly with the aid of the quantum numbers of

¹⁾ See GEHRCKE: Handb. d. Physik, Optik, Band 2, zweite Hälfte, erster Teil. P. ZEEMAN and T. L. DE BRUIN: Magnetische Zerlegung der Spektrallinien, p. 605.

²⁾ As preceding note p. 608.

S. GOUDSMIT, J. v. D. MARK and P. ZEEMAN: Versl. Kon. Ak. Amsterdam 33, 977, 1924; Proceedings 28, 127, 1925.

³⁾ E. BACK und A. LANDÉ: ZEEMAN-effekt und Multipletstruktur.

a term. When the coupling scheme of RUSSELL—SAUNDERS holds the g -value of a term is given by the formula :

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

Here is: j = inner quantum number, s = rotational quantum number (spin) l = azimuthal quantum number.

The coupling scheme of RUSSELL and SAUNDERS is symbolically given by: $\{ (s, s_2) (l_1 l_2) \} = (s l) = j$ in which s_1 and l_1 belong to the atomic core and s_2 and l_2 to the optical electron.

On account of further theoretical considerations of LANDÉ one can expect deviations from those g -values will appear in the spectra of the inert gases. (for the arc spectra as well as for the ionised spectra) BACK¹⁾ was the first who checked this in the arc spectrum of Neon (*Ne I*), while the experimental investigation of the magnetic separation of ionised Neon (*Ne II*) and ionised Argon (*Ar II*) and now also of ionised Krypton (*Kr II*) has learned that there appear so called "anomalous" g -values in these spectra.

According to GOUDSMIT and UHLENBECK²⁾ one can yet calculate g -values for other coupling schemes :

$$\begin{aligned} \{ (s_1 l_1) (s_2 l_2) \} &= (j_1 j_2) = j \\ [\{ (s_1 l_1) s_2 \} l_2] &= \{ (j_1 s_2) l_2 \} = (s' l_2) = j \\ [\{ (s_1 l_1) l_2 \} s_2] &= \{ (j_1 l_2) s_2 \} = (l' s_2) = j. \end{aligned}$$

None of these coupling schemes give g -values that agree with the g -values experimentally found in the till now investigated spectra³⁾.

When anomalous g -values occur one expects according to the theory of HEISENBERG, PAULI and LANDÉ, that however the g -values of the separate terms deviate from the normal ones, the g -sum of certain groups of terms will remain constant.

From the terms arising from the coupling of one electron one must join to groups the terms with equal j , then the sum of the g -values of the terms of such a group is constant and can be calculated beforehand. This sum is equal to the sum of LANDÉ's g -values for these terms.

This rule is tested by BACK in the case of *Ne I*. Also for the ionised inert gases the rule holds very well. (See Tables 4 and 5.)

Table 3 contains the magnetic separations of lines that are combinations of the $5s$ and $5p$ terms (3P) of simply ionised Krypton (*Kr II*). The wavelengths (\AA .) and intensities are taken from BLOCH c.s. In the third

1) E. BACK: Ann. der Phys. **76**, 317, 1925.

2) S. GOUDSMIT and G. E. ÜHLENBECK: Zeitschr. f. Phys. **35**, 618, 1926.

3) For the ionized inert gases the calculation has been performed by:

C. J. BAKKER: Versl. Kon. Ak. Amsterdam **37**, 835, 1928; Proceedings **31**, 1041, 1928.

TABLE 4.

λ	Termcomb. $x-y$	Magnetic separation						g_x		g_y		Remarks
								theor.	obs.	theor.	obs.	
4846.58	5s $^2P_2-5p \ ^2P_1$	L obs. calc.	(0.33) (0.12) (0.13)	1.00 1.38 1.39	1.67 1.65			1.33	1.52	0.67	1.78	1)
4811.73	5s $^4P_1-5p \ ^4D_2$	L obs. calc.	0.47 (0.64) ⁵ 0.57	(0.73) 1.01 (0.69)	1.93 1.95			2.67	2.64	1.20	1.26	2)
4765.72	5s $^4P_2-5p \ ^4D_3$	L obs. calc.	(0.18) (0.15) ⁵ (0.15) ⁵	(0.54) (0.46) (0.46)	0.83 0.76 0.76	1.19 1.07 1.07 ⁵	1.55 1.38 1.38 ⁵	1.73	1.54	1.37	1.23	3)
4762.42	5s $^2P_1-5p \ ^2D_2$	L obs. calc.	(0.07) (0.31) ⁵ (0.32)	0.73 1.01 1.02	0.87 1.65 1.65			0.67	0.70	0.80	1.33	4)
4738.98	5s $^4P_3-5p \ ^4P_3$	L obs. calc.	(0.00) (0.00) (0.00)	1.60 1.58 1.60				1.60	1.60	1.60	1.60	5)
4680.39	5s $^2P_1-5p \ ^2S_1$	L obs. calc.	(0.67) (0.41) (0.40)	1.33 1.09 1.10				0.67	0.70	2.00	1.50	6)
4658.86	5s $^4P_3-5p \ ^4P_2$	L obs. calc.	(0.07) (0.00) (0.03)	(0.20) 1.51 (0.09)	1.40 1.51 1.49	1.53 1.67 1.55	1.67 1.80 1.61	1.60	1.60	1.73	1.67	7)
4619.13	5s $^2P_2-5p \ ^2D_3$	L obs. calc.	(0.07) (0.00) (0.09)	(0.20) 1.21 (0.27)	1.00 1.21 1.07	1.13 1.27 1.25	1.40 1.43 1.61	1.33	1.52	1.20	1.34	8)
4615.28	5s $^2P_2-5p \ ^2P_2$	L obs. calc.	(0.00) (0.33) (0.13)	1.33 1.15 (0.39)	1.37 1.13 1.39	— 1.65		1.33	1.52	1.33	1.26	
4436.81	5s $^4P_1-5p \ ^2P_2$	L obs. calc.	(0.67) 0.63 0.57	0.67 1.94 (0.69)	2.00 1.94 1.95			2.67	2.64	1.33	1.26	9)
4431.68	5s $^4P_1-5p \ ^4D_1$	L obs. calc.	(1.33) (1.31) ⁵ (1.32)	1.33 1.31 ⁵ 1.32				2.67	2.64	0.00	0.00	10)
4355.50	5s $^4P_3-5p \ ^4D_4$	L obs.	(0.09) (0.00)	(0.26) 1.06	(0.43) 1.00	1.17 1.34	1.51 1.69	1.60	1.60	1.43	1.43	11)
4300.51	5s $^2P_2-5p \ ^4S_2$	L obs. calc.	(0.33) (0.00) (0.01)	(1.00) 1.51 (0.03)	1.00 1.53	1.67 1.55	2.33	1.33	1.52	2.00	1.54	
4292.94	5s $^4P_2-5p \ ^4D_2$	L obs. calc.	(0.27) (0.43) (0.14)	(0.80) 1.12 (0.42)	0.93 1.39 1.40	1.47 1.67 1.68	2.00	1.73	1.54	1.20	1.26	12)

TABLE 4 (Continued).

λ	Termcomb. x-y	Magnetic separation							g_x		g_y		Remarks
									theor.	obs.	theor.	obs.	
4250.60	$5s\ ^2P_2-5p\ ^2D_2$	L obs. calc.	(0.27) (0.20) (0.09)	0.53 0.80 (0.28)	(0.80) 1.07 1.24	1.07 1.40 1.43	1.60		1.33	1.52	0.80	1.33	
4185.13	$5s\ ^2P_2-5p\ ^2S_1$	L obs. calc.	(0.33) (0.00) (0.01)	1.00 1.51 ⁵ 1.51	1.67				1.33	1.52	2.00	1.50	13)
4145.13	$5s\ ^4P_1-5p\ ^4S_2$	L obs. calc.	(0.33) (0.55 ⁵) (0.55)	1.66 0.99 0.99	2.33 2.10 2.09				2.67	2.64	2.00	1.54	14)
4098.74	$5s\ ^4P_1-5p\ ^2D_2$	L obs. calc.	0.13 0.66 (0.65)	(0.93) 1.97 0.68	1.73 1.98 ⁵				2.67	2.64	0.80	1.33	15)
4037.81	$5s\ ^4P_1-5p\ ^2S_1$	L obs. calc.	(0.33) (0.57) (0.57)	2.33 2.09 2.07					2.67	2.64	2.00	1.50	16)
3994.83	$5s\ ^4P_2-5p\ ^2D_3$	L obs. calc.	(0.27) (0.00) (0.10)	0.40 1.13 (0.30)	(0.80) 0.93 1.04	1.47 2.00 1.24	2.00		1.73	1.54	1.20	1.34	17)
3912.54	$5s\ ^4P_3-5p\ ^4D_2$	L obs. calc.	(0.20) (0.17) (0.17)	(0.60) (0.52) (0.51)	1.00 — 1.09	1.40 2.09 1.43	1.80 2.11		1.60	1.60	1.20	1.26	18)
3754.20	$5s\ ^4P_2-5p\ ^4S_2$	L obs. calc.	(0.13) (0.00) (0.00)	(0.40) 1.55 ⁵ 1.54	1.60 1.87	2.13			1.73	1.54	2.00	1.54	19)
3666.00	$5s\ ^4P_2-5p\ ^2S_1$	L obs. calc.	(0.13) (0.00) (0.02)	1.60 1.58 1.52	1.87 1.59				1.73	1.54	2.00	1.50	20)
3460.09	$5s\ ^4P_3-5p\ ^4S_2$	L obs. calc.	(0.20) (0.00) (0.03)	(0.60) — (0.09)	1.00 1.67 1.51	1.40 1.69 1.57	1.80 1.69		1.60	1.60	2.00	1.54	

REMARKS.

1. rather sharp quartet.
2. diffuse doublet.
3. sharp and completely resolved. See plate.
4. sharp sextet. On short wavelength side slight disturbance of other weak line. See plate.
5. sharp triplet.
6. sharp quartet. See plate.
7. strong triplet, diffuse. Intensity decrease to the outside.
8. diffuse triplet. Intensity decrease to the outside.
9. quartet with very strong inner components.
10. sharp doublet.

11. strong "Pseudo triplet" Central component enlarged; in both the other large components decrease of intensity clearly to the outside.
12. sharp. See plate.
13. rather sharp triplet!! See plate.
14. sharp sextet.
15. quartet with strong inner components.
16. weak, sharp quartet.
17. triplet on the edge of the plate. Decrease of intensity to the outside.
18. The outer components are strong and show a decrease of intensity to the inside; the structure in the outer components is difficult to measure.
19. very sharp triplet!!
20. very weak triplet.

column is L - the magnetic separation calculated with the g -formula of LANDÉ.

obs. = the observed magnetic separation.

calc. = the magnetic separation calculated with anomalous g -values.

The last column contains the g -values of LANDÉ (theor.) and the observed g -values. (*obs.*)

In table 1 the g -values got in this way are placed behind the corresponding termvalues. Magnetic separations of combinations with the term $5p^2P_1$ are not on our plates, so that the g -value of that term fails.

6. Comparison of g -values of analogous terms.

On account of theoretical considerations one expects that with increasing atomic number g -values of analogous terms show an increasing deviation from the normal g -values of LANDÉ. Tables 4 and 5 show that this rule holds very well.

Table 4 includes the g -values of analogous s -terms in ionised Neon ($Ne II$), ionised Argon ($Ar II$) and ionised Krypton ($Kr II$), besides in the first column the g -values calculated according to the formula of LANDÉ (coupling $\{ (s_1 s_2) (l_1 l_2) \}$) and in the last column the g -values calculated according to the coupling scheme $\{ (s_1 l_1) (s_2 l_2) \}^1$. It is remarkable that deviating g -values appear for the terms with $j=2$ of $Kr II$ with such a suddenly large deviation from the normal values. The g -sum rule is fulfilled.

Table 5 includes the g -values of analogous p -terms. Among the 15 terms arising from the p -electron only 3 terms show yet normal g -values in the case of $Kr II$. The other terms have g -values, which with increasing atomic number show more or less strong deviations from the normal g -values. The increasing deviations of the g -values of the terms np^4S_2 , np^2D_2 and np^2P_1 are very remarkable, because those deviations increase suddenly and very strongly for ionised Krypton ($Kr II$). The agreement of the g -sums is excellent in all cases.

¹) Because for a s -electron $s_2=0$ the coupling schemes $\{ (s_1 l_1) (s_2 l_2) \}$, $[\{ (s_1 l_1) s_2 \} l_2]$ and $[\{ (s_1 l_1) l_2 \} s_2]$ give the same g -values in this case.

TABLE 5. Neon II $n=3$; Argon II $n=4$; Krypton II $n=5$.

Term	g -values				
	LANDÉ $\{ (s_1 s_2) (l_1 l_2) \}$	Ne II	Ar II	Kr II	$\{ (s_1 l_1) (s_2 l_2) \}$
$j=3$ ns 4P_3	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60
$j=2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ns } ^4P_2 \\ \text{ns } ^2P_2 \end{array} \right.$	1.73	1.73	1.73	1.54	1.40
	1.33	1.33	1.33	1.52	1.66
	$\frac{3.06}{3.06} +$	$\frac{3.06}{3.06} +$	$\frac{3.06}{3.06} +$	$\frac{3.06}{3.06} +$	$\frac{3.06}{3.06} +$
$j=1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ns } ^4P_1 \\ \text{ns } ^2P_1 \end{array} \right.$	2.67	2.67	2.67	2.64	2.00
	0.67	0.67	0.67	0.70	1.34
	$\frac{3.34}{3.34} +$	$\frac{3.34}{3.34} +$	$\frac{3.34}{3.34} +$	$\frac{3.34}{3.34} +$	$\frac{3.34}{3.34} +$

TABLE 6. Neon II $n=3$; Argon II $n=4$; Krypton II $n=5$.

Term	g -values				
	LANDÉ $\{ (s_1 s_2) (l_1 l_2) \}$	Ne II	Ar II	Kr II	$\{ (s_1 l_1) (s_2 l_2) \}$
$j=4$ np 4D_4	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
$j=3$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{np } ^4D_3 \\ \text{np } ^4P_3 \\ \text{np } ^2D_3 \end{array} \right.$	1.37	1.37	1.33	1.23	1.33
	1.60	1.60	1.60	1.60	1.44
	1.20	1.20	1.24	1.34	1.40
	$\frac{4.17}{4.17} +$	$\frac{4.17}{4.17} +$	$\frac{4.17}{4.17} +$	$\frac{4.17}{4.17} +$	$\frac{4.17}{4.17} +$
$j=2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{np } ^4D_2 \\ \text{np } ^4P_2 \\ \text{np } ^4S_2 \\ \text{np } ^2D_2 \\ \text{np } ^2P_2 \end{array} \right.$	1.20	1.20	1.20	1.26	1.38
	1.73	1.73	1.73	1.67	1.67
	2.00	2.00	2.00	1.54	1.33
	0.80	0.80	0.90	1.33	1.47
	1.33	1.33	1.23	1.26	1.22
	$\frac{7.06}{7.06} +$	$\frac{7.06}{7.06} +$	$\frac{7.06}{7.06} +$	$\frac{7.06}{7.06} +$	$\frac{7.06}{7.06} +$
$j=1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{np } ^4D_1 \\ \text{np } ^4P_1 \\ \text{np } ^2P_1 \\ \text{np } ^2S_1 \end{array} \right.$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67
	2.67	2.67	2.67		1.67
	0.67	0.71	0.99	1.78	1.78
	2.00	1.96	1.68	1.50	1.22
	$\frac{5.34}{5.34} +$	$\frac{5.34}{5.34} +$	$\frac{5.34}{5.34} +$	$\frac{5.34}{5.34} +$	$\frac{5.34}{5.34} +$



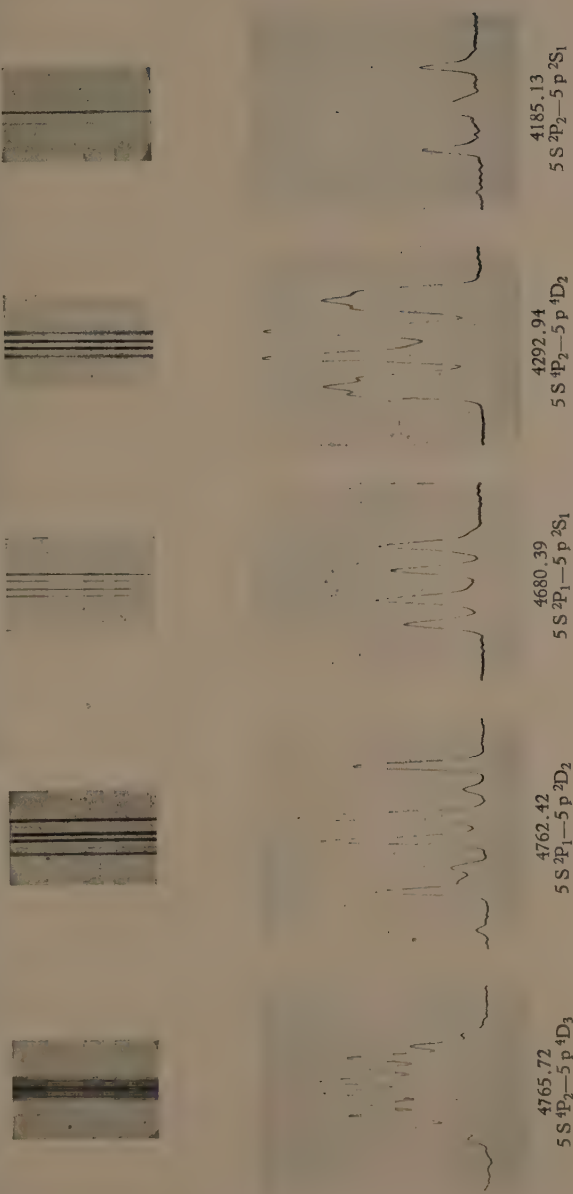
TABLE 5. Neon II $n = 3$; Argon II $n = 4$; Krypton II $n = 5$.

Term		<i>g</i> -values				
		LANDE $\{(s_1 s_2) (l_1 l_2)\}$	Ne II	Ar II	Kr II	$\{(s_1 l_1) (s_2 l_2)\}$
3	ns 4P_3	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60
2	ns 4P_2	1.73	1.73	1.73	1.54	1.40
		1.33	1.33	1.33	1.52	1.66
	ns 2P_2	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06
1	ns 4P_1	2.67	2.67	2.67	2.64	2.00
		0.67	0.67	0.67	0.70	1.34
	ns 2P_1	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34

TABLE 6. Neon II $n = 3$; Argon II $n = 4$; Krypton II $n = 5$.

Term		<i>g</i> -values				
		LANDE $\{(s_1 s_2) (l_1 l_2)\}$	Ne II	Ar II	Kr II	$\{(s_1 l_1) (s_2 l_2)\}$
4	np 4D_4	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
3	np 4D_3	1.37	1.37	1.33	1.23	1.33
		1.60	1.60	1.60	1.60	1.44
	np 2D_3	1.20	1.20	1.24	1.34	1.40
		4.17	4.17	4.17	4.17	4.17
2	np 4D_2	1.20	1.20	1.20	1.26	1.38
		1.73	1.73	1.73	1.67	1.67
	np 4P_2	2.00	2.00	2.00	1.54	1.33
		0.80	0.80	0.90	1.33	1.47
	np 2P_2	1.33	1.33	1.23	1.26	1.22
		7.06	7.06	7.06	7.06	7.06
1	np 4D_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67
		2.67	2.67	2.67		1.67
	np 2P_1	0.67	0.71	0.99	1.78	1.78
		2.00	1.96	1.68	1.50	1.22
		5.34	5.34	5.34		5.34

C. J. BAKKER AND P. ZEEMAN: THE MAGNETIC SEPARATION IN THE SPECTRUM OF IONISED KRYPTON (KrII)



7. Summary.

The magnetic separation of the *Kr II* spectrum has been investigated. The g -values of the terms arising from the coupling of the $5s$ and $5p$ electron have been fixed and it is shown that g -values with strong "anomaly" appear. The g -sum rule has been confirmed. A comparison of the g -values of analogous terms in the spectra of *Ne II*, *Ar II* and *Kr II* is given.

*Laboratory "Physica" of the University
Amsterdam.*

May, 1929.

DESCRIPTION OF THE PLATE.

The enlargement of the reproductions of the original magnetic separations is 9 times. The photograms are made by means of a photometer of Zeiss, provided with photo electric cell and electro meter. The distances of the tops in the photograms are about 33 times those of the corresponding magnetic components on the original plate.

It is remarkable that in some cases the intensities of analogous magnetic components (lying on the same distance from the middle) are not equal. See $\lambda = 4762.42$ and $\lambda = 4680.39$.

Both the lines $\lambda = 4680.39$ and $\lambda = 4185.13$ that form a ${}^2P-{}^2S$ doublet, just as for instance the well known *Na*-doublet D_1 and D_2 , show very clearly the effect of the "anomalous" g -values. The combination ${}^2P_2-{}^2S_1$ that splits up in the case of normal g -values in a sextet with aequidistant components has become here a sharp triplet!

Physics. — *The law of the para-magnetisation of a crystal and the law of the paramagnetic rotatory dispersion.* By JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS. (Communication N^o. 199a from the Physical Laboratory at Leiden.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

I. *General considerations.* 1^o. *Fundamental law of the para-magnetisation of a crystal.* 2^o. R. LADENBURG's law of the paramagnetic rotatory dispersion.

In a recent paper ¹⁾ we showed that the *paramagnetic* rotatory power of tysonite in the direction of the optical axis is represented with a great precision by the following law :

$$\varrho = \varrho_{\infty} \tanh \frac{\mu_B H}{RT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

where H is the magnetic field-strength, T the absolute temperature, R the gas-constant. The *saturation-rotation* ϱ_{∞} is a function of the light-period (rotatory dispersion) and of the temperature.

μ_B is a magnetic moment which in the case of tysonite is found to be equal to the Bohr magneton. The law obtained by us is a magnetisation law in agreement, in this particular case at least, with the theoretical views of W. LENZ ²⁾ and of P. EHRENFEST ³⁾ on the mechanism of magnetisation. As it is impossible to reduce this law to a more simple form we are inclined to think, that it represents the most elementary mechanism of the para-magnetisation of a crystal.

An explanation however is due, why we found a simple law in a case which at first sight seems complex. In fact tysonite contains three paramagnetic ions : Ce^{+++} , Pr^{+++} , Nd^{+++} . Moreover the measurements of the magnetisation of oxides or of salts are interpreted by ascribing to these three ions different moments all greater than that of the Bohr magneton ⁴⁾.

We first remember, that in our experiments the paramagnetic phenomenon becomes manifest by the unequal absorption of circular vibrations of opposite sign. It is evident that in a substance containing different paramagnetic ions the influence of each of these is proportional to its absorption. That is why the rotation is not proportional to the value of

¹⁾ JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS, Comm. Leiden N^o. 193a, 1928.

²⁾ W. LENZ, Phys. Z.S. 21, 613, 1920.

³⁾ P. EHRENFEST, Comm. Leiden Suppl. N^o. 44b.

⁴⁾

Ce^{+++}	Pr^{+++}	Nd^{+++}	} Weiss magnetons.
St. Meyer 13.8	17.3	17.5	
Cabrera 11.90	17.89	18.0	

the magnetisation which would have been obtained by means of magnetic measurements. It may be, that only one kind of ion is optically active or at least that its influence exceeds that of the other ions so far as to render the existence of these other ions negligible. This is precisely the case with tysonite as we shall establish in our investigations on the magnetic rotatory dispersion. We have already mentioned ¹⁾ that long since one of us traced back to the paramagnetism both certain dissymmetries in the intensities, which are observed in the absorption of circular vibrations of opposite sign, and the connected effect of the magnetic rotation. The same author expressed the opinion, that the predominance of one of the directions of motion of the electrons in due to an orientation in the field ²⁾. Recently R. LADENBURG proceeding from analogous ideas considerably advanced the question by giving the first quantitative mathematical theory of the paramagnetic rotatory dispersion. In combination with the quantum theory of dispersion previously developed by LADENBURG ³⁾ the new theory of this author enables us, among other important results, to predict under what circumstances the paramagnetic rotatory power can predominate over the diamagnetic rotatory power ⁴⁾ and to know the sense of the paramagnetic rotation. From the point of view of R. LADENBURG and W. PAULI Jr. two opposite senses are possible according as the variation of the internal quantum number j is equal to ± 1 or to 0.

In the first paper LADENBURG ⁵⁾ gave the following formula :

$$e = \frac{lw(n^2 + 2)^2}{36cn} \left[\sum_s \frac{(\epsilon_{s-} + \epsilon_{s+}) 2w O_L}{(w_s^2 - w^2)^2 - 4w^2 O_L^2} + \sum_s \frac{(\epsilon_{s-} - \epsilon_{s+}) (w_s^2 - w^2)}{(w_s^2 - w^2)^2 - 4w^2 O_L^2} \right] \quad (2)$$

in which l is: thickness traversed by the light; n index of refraction:

$c = 3 \cdot 10^{10}$; $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$ frequency expressed in 2π seconds (λ wavelength in vacuo); w_s natural frequency of the oscillators, in the *classical* sense,

giving the absorption band s ; $O_L = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{1}{c} H$ angular velocity of the

Larmor precession ⁶⁾; $\epsilon_{s\mp} = 4\pi \mathfrak{N}_{s\mp} \frac{e^2}{m}$, where \mathfrak{N}_{s-} and \mathfrak{N}_{s+} are the numbers, per unit of volume of the fictitious electrons s (Ersatzoszillatoren), of the classical dispersion theory, in circular motion of sign negative and positive with respect to the positive direction of the field.

¹⁾ JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS, loc. cit. § I.

²⁾ JEAN BECQUEREL C.R. de l'Ac. des Sc.; **143**, 24 déc. 1906.

³⁾ R. LADENBURG, Zs. f. Phys. **4**, 451, 1921.

⁴⁾ One of these circumstances is a sufficiently low temperature; already in 1907 one of us has pointed out this fact. It was even the very idea, that a rotation of paramagnetic origin much follows a law analogous to that of Curie for the magnetisation, which led to the introduction of the use of low temperatures in optical researches.

⁵⁾ R. LADENBURG, Zs. f. Phys. **34**, 898, 1925.

⁶⁾ R. LADENBURG considers here the normal Zeeman effect only.

A research of C. G. DARWIN, and W. R. WATSON ¹⁾ led LADENBURG to a modification of his formula ²⁾. He obtained the following result :

$$\varrho = \frac{lw^2}{2cn} \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \left[\sum_s \frac{(\varepsilon_{s-} + \varepsilon_{s+}) 2 O_L}{(w_s^2 - w^2 + O_L^2)^2 - 4 O_L^2 w_s^2} + \sum_s \frac{1}{w_s} \frac{(\varepsilon_{s-} - \varepsilon_{s+}) (w_s^2 - w^2 + O_L^2)}{(w_s^2 - w^2 + O_L^2)^2 - 4 O_L^2 w_s^2} \right] \quad (3)$$

In both formulae (2) and (3) the first term in the brackets represents the diamagnetic rotation ³⁾ which was the only one considered in the old theory of Voigt. This rotation is the immediate consequence of the magnetic decomposition of the spectral rays and of the dispersion.

This effect is necessarily small.

The second term in the brackets is the *paramagnetic rotation* which is superposed on the diamagnetic rotation and which can become considerably greater. The condition for the existence of this rotation is, that by the phenomenon of the paramagnetic orientation ε_{s-} and ε_{s+} become different.

The difference $(\varepsilon_{s-} - \varepsilon_{s+})$ is a function of $\frac{H}{T}$. The Larmor rotation also occurs in the paramagnetic term, but it is quite negligible for frequencies that are not lying in the neighbourhood of the proper frequency w_s .

It is interesting to remark, that the paramagnetic rotation need not be an exceptional phenomenon. The actual theory of the Zeeman effect shows that at least either in the initial or in the final state the atom necessarily possesses a magnetic moment and that generally the two states are paramagnetic. The Zeeman phenomenon, formerly considered as purely diamagnetic, is in reality paramagnetic as to its origin and diamagnetic as to the effect of precession. But the conditions favourable for the observation of the paramagnetic rotation are exceptional, a sufficiently high magnetic moment or a very low temperature being required and moreover a sufficiently intense absorption in the region of the active bands. In the formulae (2) and (3) the "damping" term of the classical theory is neglected; this is allowed at a distance from the rays (or bands) sufficiently large compared with their width.

II. *Experimental verification of R. LADENBURG's law of paramagnetic rotatory dispersion.*

Before the investigation on the variation of the magnetic rotatory power as a function of the field-strength, we have measured at different temper-

¹⁾ C. G. DARWIN and W. R. WATSON, Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 474, 1927.

²⁾ R. LADENBURG, Zs. f. Phys. **46**, 168, 1927.

³⁾ In the case of one single active band the term can be reduced, as a first approximation, to the formula of HENRI BECQUEREL: $\varrho = \frac{lw}{c} \theta \cdot \frac{\partial n}{\partial w}$, so that θ becomes identical with the Larmor precession.

atures in a constant field, and for numerous wavelengths, the rotations of the crystals of tysonite, Parisite, Bastnaesite, Xénotime. Several results relating to the tysonite were published in 1925¹⁾, but some rectifications of the numerical values are necessary. We gave 1.673 mm. for the thickness of the plate. Now it is true that with a plate of this thickness some measurements were made (1910) at the temperature of 291° K., but because of a mistake (due to the long interruption of the researches from 1914 to 1924) the plate used since 1924 is not the one mentioned before (this one has been lost). It is a plate of 1.866 mm. thickness. Moreover the constant field used in 1925 and mentioned as equal to 26.17 kilogauss is in fact equal to 26.73 kilogauss, as has been established by more accurate measurements made since then. Finally the measurements of the rotation at 4.2° K. may not be reduced to 10.000 gauss as we did, the rotatory power at that temperature being no longer proportional to the field. Thus all numbers must be corrected. At the end of this paper we give the definite results both for tysonite and for the other crystals. (See also comm. 199b.)

The measurements in a constant field refer to different regions of the visible spectrum and to the first part of the ultra-violet. They were made, either by noting (on cliché's the bands between crossed polariser and analyser, or as been described in the paper of 1925, by the fringe-method with a Babinet compensator combined with a quarter-wavelength-plate²⁾). The latter method is far from being as sensitive as that of the half shadow-polariser, but it gives a sufficient relative accuracy for the enormous rotations at low temperatures. By means of measurements on cliché's and of ten readings for each point, we obtain for the individual measurements a precision higher than 0.01 of a fringe (0.01 fringe corresponds to $\frac{\pi}{100}$ or to 1.8°). The errors being accidental, the plotting of the curve for numerous measurements, taken from millimeter to millimeter (1 mm. of the cliché corresponds to about 25 Å in the 2nd spectrum) generally allows a better approximation in the definite result. The precision is always lower in the region of the short wavelengths, where the absorption becomes great; for, unless at exceedingly long exposures (impossible during the measurements at helium temperatures, which last only a few hours), the bands are wide.

This method has the advantage of going the whole of the rotations over a long spectral range and of showing at first glance the *local* disturbances

¹⁾ JEAN BECQUEREL, H. KAMERLINGH ONNES and W. J. DE HAAS, Comm. Leiden N^o. 177 (1925).

²⁾ An easy calculation shows that, when the plate is not exactly a quarter-wavelength-plate, the results do not contain an appreciable error. In fact the fringes practically keep the same position: theoretically the extinction is no longer total at the middle of the fringes, but this is not perceptible. For the whole spectrum three plates suffice. Those we used are of a quarter wavelength for 4000, 4500, 5800 Å.

due to some absorption bands¹⁾. In the following we only consider the rotations in regions that are sufficiently distant from the bands to render these disturbances negligible; we then have the principal effect due to the absorption in the ultra-violet.

We shall see, that the experimental results are represented by formula (3) and not by formula (2).

Let us consider formula (3) and suppose that the paramagnetically active band is the only one. At low temperatures the diamagnetic rotation vanished in comparison with the enormous paramagnetic rotation. Moreover we may neglect in the paramagnetic term the square O_L^2 of the Larmor precession, the visible spectrum and even the first part of the ultra-violet being certainly sufficiently distant from the active band. Formula (3) may thus be written in the form:

$$\varrho = \frac{l}{2c} \frac{(n^2 + 2)^2}{9n} \frac{w^2}{w_s(w_s^2 - w^2)} \Delta \varepsilon_s ; \quad (\Delta \varepsilon_s = \varepsilon_{s-} - \varepsilon_{s+})$$

If we introduce the wavelength reduced to vacuum $\left(\lambda = \frac{2\pi c}{w}\right)$ we get

$$\varrho = \frac{l}{4\pi c^2} \frac{(n^2 + 2)^2}{9n} \cdot \frac{\lambda_s^3}{\lambda^2 - \lambda_s^2} \Delta \varepsilon_s \quad \dots \quad (3')$$

We eliminate $\Delta \varepsilon_s$ with the aid of the ratio $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ of the rotations of two wavelengths λ_1, λ_2 to which correspond the indices n_1, n_2 . We have:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{(n_1^2 + 2)^2}{(n_2^2 + 2)^2} \cdot \frac{\lambda_2^3 - \lambda_s^3}{\lambda_1^3 - \lambda_s^3} \dots \quad (4)$$

If we put:

$$a = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{(n_2^2 + 2)^2}{(n_1^2 + 2)^2}$$

we obtain

$$\lambda_s^2 = \frac{a \lambda_1^2 - \lambda_2^2}{a - 1} \dots \quad (5)$$

If our assumption is true, that this is the only band, the measurement of the rotations for two wavelengths allows us to calculate the position of the band and the same result must be found whatever pair of radiations λ_1, λ_2 may be chosen.

We have applied this calculation to tysonite, but here a difficulty arises: the plate in our possession being very small it was impossible to measure

¹⁾ The method of the Babinet compensator combined with a quarter wave-length-plate, has an advantage over that of the compensator with two rotating quartzplates viz. it allows the obtaining of distinct fringes at the edges of the absorption bands and even in the interior of the circularly polarised components, it suffices to orientate the analyser accurately.

the refractive indices for the blue and violet radiations. GAUBERT found for the ordinary index with regard to air and for room temperature

$$\begin{array}{ll} 1.6128 & \text{for } \lambda = 5893 \\ 1.6168 & \text{,, } \lambda = 5350 \text{ (thallium).} \end{array}$$

These two determinations are insufficient to obtain the exact law of dispersion.

The term $\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{(n_2^2+2)^2}{(n_1^2+2)^2}$ is at all events nearly equal to one. If, as a first approximation, we replace it by one, we find from the results obtained at 1.95° K. and at 4.21° K. , that the calculated quantity λ_s^2 is constant within the limits of precision of the measurements of the rotations. The calculation, made for several pairs of values (chosen in such a way that $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ is nearly equal to 2) gives a wavelength about $\lambda_s = 2420 \text{ \AA.}$

If a law of dispersion is assumed within the allowed limits the constancy of λ_s^2 remains equally good. This is the principal point for the verification of the law of LADENBURG, but the value found for λ_s^2 depends on the admitted dispersion. The only thing we could do was to adopt the dispersion law of a kind of glass with very nearly the same indices as tysonite for the yellow and for the green rays. A little uncertainty remains, not in the essential result (i.e. in the verification of the formula of LADENBURG), but in the position of the active absorption band. Anyhow, by assuming this dispersion law, we certainly find a more exact value for λ_s than by supposing n to be constant; this value must even be exact within a few angströms, as the adopted dispersion law cannot be much different from the true law.

The wavelength λ_s having been determined in this way, we calculate with the aid of formula (3') $\Delta \varepsilon_s$ for different values of λ . The values thus found for $\Delta \varepsilon_s$ are remarkably constant.

As a result of our measurements we thus found :

$$\text{at } 4.21^\circ \quad \lambda_s = 2369 \text{ \AA} \quad l \Delta \varepsilon_s = -1.947.10^{28}$$

for $H = 26.73$ kilogauss and thickness 1 mm. at room temperature (the value of the thickness at 4.21° lies very near 0.1 cm.).

The figure represents the theoretical curve given by formula (3') with the above values. The marked points are points from the experimental curve. The agreement between theory and experiment is remarkable in the region distant from the groups of bands. In the neighbourhood of these groups we find the deviations, we could expect, due to the disturbances caused by the bands. Especially an enormous deviation is observed due to the presence of the intense band 5776^1). The agreement with the theo-

¹⁾ See Comm. Leiden N^o. 177 (1925). The influence of this band is made manifest by a supplementary fringe in fig. 3 and by a strong curvature of the fringes in fig. 5.

retical curve becomes however better, when we go away from this band towards the red. We will give the verification of the formula at the

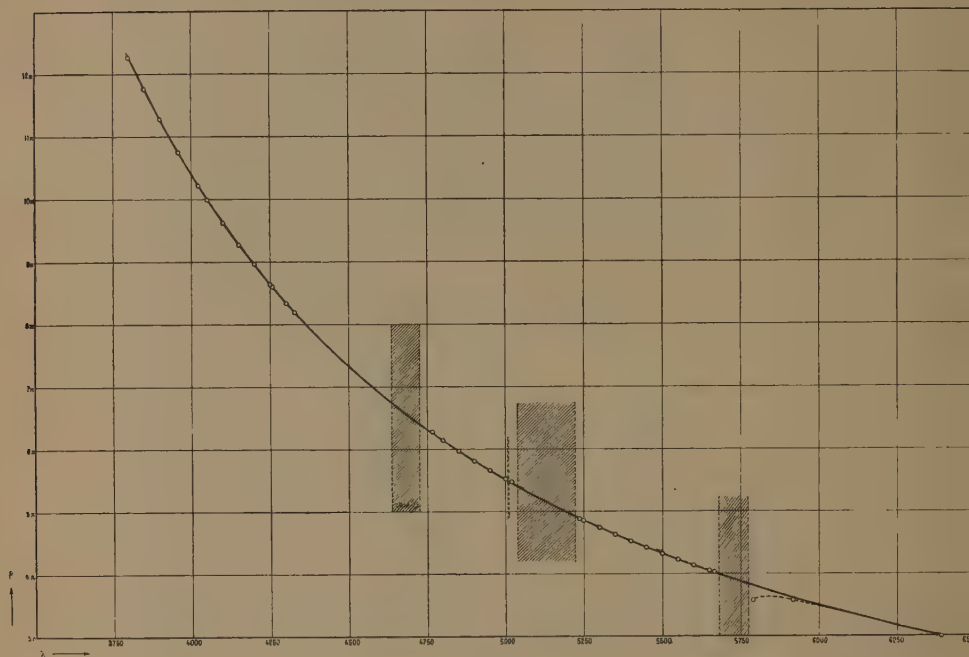


Fig. 1.

temperature of 1.95° K. from the ultra-violet to the blue. The rotations in a field of 26.73 kilogauss were measured with the method of the canalculated spectrum. The wavelengths of the fringes were determined by interpolation between the rays of tysonite and some rays of the arc-light. Table (1) gives the λ in air and reduced to vacuum, (the index having been estimated in the above mentioned way), the obtained rotations (reduced to a thickness of 1 mm. after application of a correction for the rotation due to the cryostat), and finally the rotations calculated by means of the formula with

$$\lambda_s = 2371 \text{ \AA} \quad \text{and} \quad l \triangle \epsilon_s = -2.9613 \cdot 10^{28}.$$

So formula (3') is verified to one *thousandth*. At the temperatures of 4.2° and 1.95° we practically find the same position for the active band, but this position was not determined very accurately, the calculated wavelength depending on the dispersion law, which remains uncertain. We can only say that the active band lies in the neighbourhood of 2370 \AA .

At the temperatures of liquid hydrogen and of liquid nitrogen, the verifications are still very good. For λ_s we took the same wavelength as

TABLE I. Tysonite $T = \text{about } 1.95^\circ$. $H = 26.73$ kilo-gauss.
Rotations reduced to a thickness of 1 mm at room temperature.

$\lambda_g = 2371 \text{ \AA}$ $1/\Delta \epsilon_g = 2.9613 \cdot 10^{28}$					
λ	λ reduced to vacuum	n adopted	$-\rho$ measured in multiples of π	$-\rho$ calculated	deviations
3830.4	3831.5	1.6389	18.265	18.256	+ 0.009
3864.2	3865.3	1.6379	17.728	17.732	- 0.004
3899.1	3900.2	1.6370	17.191	17.219	- 0.028
3939.9	3941.0	1.6358	16.654	16.648	+ 0.006
3979.5	3980.6	1.6348	16.117	16.124	- 0.007
4022.4	4023.5	1.6338	15.580	15.588	- 0.008
4068.7	4069.8	1.6328	15.043	15.042	+ 0.001
4116.6	4117.7	1.6318	14.506	14.510	- 0.004
4168.7	4169.8	1.6309	13.968	13.967	+ 0.001
4222.9	4224.1	1.6298	13.431	13.436	- 0.005
4282.2	4283.4	1.6288	12.894	12.892	+ 0.002
4344.8	4346.0	1.6278	12.357	12.358	- 0.001
4414.0	4415.2	1.6267	11.820	11.808	+ 0.012
4486.9	4488.1	1.6257	11.283	11.271	+ 0.012
4564.3	4565.6	1.6247	10.746	10.743	+ 0.003
4742.6	4743.9	1.6227	9.672	9.672	0.000

at 4.2° (2369 \AA); $\Delta \epsilon_g$ has been calculated from the experimental results. The rotations marked in table 2 as measured ones are those read for the indicated wavelengths on the experimental curve plotted according to the measurements.

In table 3 the λ 's are those, for which the measurements were made.

We see that at all temperatures the deviations are of the same order and within the limits of precision of the measurements according to what has been said above. The formula was also verified for parisite. We confined ourselves to the examination of the results at 4.21° K . As to the index we are here in still greater uncertainty than in the case of tysonite. For the rays D only the n has been determined ($n_0 = 1.676$); as parisite is already very absorbing for violet rays, we assumed a dispersion higher than for tysonite. Using the indices from the 3rd column in table 4, we find the active band near $\lambda_g = 2379 \text{ \AA}$, that is nearly at the same place as

TABLE II. Tysonite. Thickness 1 mm at room temperature.

$T = 20.4^{\circ} \text{ K.}$ $H = 26.73 \text{ Kilogauss}$ $\lambda_s = 2369 \text{ \AA}$ $l \Delta \epsilon_s = -0.48135 \cdot 10^{28}$			
λ (air)	$- \rho$ measured	$- \rho$ calculated	deviation
3800	3.010 π	3.038 π	- 0.028
4200	2.212	2.213	- 0.001
4600	1.711	1.705	+ 0.006
4800	1.519	1.518	+ 0.001
5600	1.028	1.028	0.000
6600	0.699	0.691	+ 0.008

TABLE III. Tysonite. Thickness 1 mm at room temperature.

$T = 77.5^{\circ} \text{ K.}$ $H = 26.73 \text{ Kilogauss}$ $\lambda_s = 2369 \text{ \AA}$ $l \Delta \epsilon_s = -0.14847 \cdot 10^{28}$			
λ (air)	$- \rho$ measured	$- \rho$ calculated	deviation
3883.3	0.854 π	0.851	+ 0.003
4015.3	0.759	0.765	- 0.006
4046.6	0.746	0.746	0.000
4215.5	0.661	0.659	+ 0.002
4315.9	0.616	0.615	+ 0.001
4447.4	0.563	0.564	- 0.001
6597.7	0.224	0.208	+ 0.016

for tysonite. Making use of these results we find the following numbers : (See table 4, following page.)

In the well transparent regions of the blue and of the green, the deviations are of the same order as for tysonite. So we can say that the law has been well verified. The deviations that are somewhat larger in the violet must be due to the less high precision of the measurements because of the bad transparency of the crystal in this region. In the red the somewhat larger deviations can be ascribed to the influence of a group of intense bands in the yellow-orange region and to the weak absorption which spreads like a veil up to the beginning of the red.

TABLE IV. Parisite. Thickness 1 mm at room temperature.

$T = 4.21^\circ \text{ K.} \quad H = 26.73 \text{ Kilogauss} \quad \lambda_g = 2379 \text{ \AA} \quad l \Delta \epsilon_g = -0.92637 \cdot 10^{28}$					
λ (air)	λ (vacuum)	n assumed	$-\rho$ measured	$-\rho$ calculated	deviation
4215	4216.2	1.7025	4.561 π	4.538	+ 0.023
4350	4351.2	1.6989	4.120	4.131	- 0.011
4500	4501.3	1.6955	3.741	3.745	- 0.004
4950	4951.4	1.6871	2.878	2.880	- 0.002
5300	5301.5	1.6825	2.419	2.411	+ 0.008
5600	5601.6	1.6790	2.100	2.098	+ 0.002
6300	6301.7	1.6726	1.535	1.576	- 0.041
6400	6401.8	1.6719	1.473	1.519	- 0.046

III. *The paramagnetic rotatory powers of tysonite and of parisite are caused by one single paramagnetic element.*

After the excellent agreement between experiment and formula (3') we are inclined to conclude that both tysonite and parisite give one single paramagnetically active band only. This has however not yet been proved. It is evident that just as good an agreement with formula (3) would have been found under the assumption of the existence of two bands and perhaps even of several active bands in the same spectral region as the one band we considered above (by assuming e.g. for tysonite at 1.95° ,

$$\lambda_{s_1} = 2366, \quad \lambda_{s_2} = 2376, \quad l \Delta \epsilon_{s_1} = -2.2653 \cdot 10^{28}, \quad l \Delta \epsilon_{s_2} = -0.7090 \cdot 10^{28}.$$

But we shall show, according to experimental results, that if several bands exist, these are not independent.

The numbers in the tables, which will be given in another paper show that the ratio $\frac{\rho_{\lambda_1}}{\rho_{\lambda_2}}$ of the rotations for two given wavelengths λ_1, λ_2 is rigorously the same at the different temperatures. The experiments described in the preceding paper¹⁾ allow a very exact verification. We mentioned, that (in the case of tysonite) the curves of the rotation ρ as a function of $\frac{H}{T}$, plotted for different wavelengths and for different temperatures, have ordinates that bear a fixed ratio to each other. The ratio of two ordinates belonging to two fixed wavelengths can be deter-

¹⁾ JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS loc. cit.

mined very precisely by taking for each temperature the mean of the ratio's obtained for different values of $\frac{H}{T}$. In this way we found :

$$\begin{aligned} \text{at } 1.71^\circ \text{ K.} \quad & \frac{\varrho_{\lambda=4259}}{\varrho_{\lambda=5328.5}} = 1.8361 \\ \text{at } 4.21^\circ \text{ K.} \quad & \frac{\varrho_{4259}}{\varrho_{5328.5}} = 1.8383. \end{aligned}$$

The constancy of the ratio has thus been verified within one half-thousandth.

From these results it is evident, that the rotation is represented by an expression of the form :

$$\varrho = \varphi(\lambda) \psi(T) f\left(\frac{H}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Let us now suppose that there exist several paramagnetically active bands ; formula (3') is then replaced by a summation of analogous terms corresponding to the different bands s_1, s_2, s_3, \dots .

$$\varrho = \frac{l}{4\pi c^2} \frac{(n^2 + 2)^2}{9n} \left[\frac{\lambda_{s_1}^3}{\lambda^2 - \lambda_{s_1}^2} \Delta \varepsilon_{s_1} + \frac{\lambda_{s_2}^3}{\lambda^2 - \lambda_{s_2}^2} \Delta \varepsilon_{s_2} + \dots \right] \quad . \quad . \quad (7)$$

At very low temperatures the thickness l varies no longer ; the term containing n varies so little, that with a close approximation it may be regarded as independent upon the temperature ; the same can be said of the λ_{s_i} . It is only through the $\Delta \varepsilon_{s_i}$ that the relation is a function of T and of $\frac{H}{T}$ and it is evident, that the expression (7) can only then take the form (6), if the $\Delta \varepsilon_{s_i}$ are the same functions of T and of $\frac{H}{T}$ but for constant factors : they are therefore not independent. This would not be the case, if the active bands belonged to different ions, for then we should have a superposition of rotations, varying independently of one another as functions of T and of $\frac{H}{T}$.

It is interesting with respect to the order of magnitude if the absorption, to calculate $\Delta \varepsilon_{s_i}$ and $(\mathfrak{N}_{s-} - \mathfrak{N}_{s+})$ in the supposition that the absorption band is the only one and further for the limiting value corresponding with the saturation.

Let us choose the wavelengths $\lambda = 5328.5$ (5330 reduced to vacuum) : the above found values for the saturation rotations are :

$$\begin{aligned} \text{at } 1.71^\circ \text{ K.} \quad & \varrho_\infty = -19.61 \pi \\ \text{at } 4.21^\circ \text{ K.} \quad & \varrho_\infty = -21.81 \pi. \end{aligned}$$

with the thickness 1.866 mm measured at room temperatures.

As the chosen wavelength lies very near one of those for which the

index is known, we find by a safe extrapolation $n = 1.617$ (1.6174 reduced to vacuum) at room temperature. Several measurements of the double-refraction of tysonite in directions oblique to the axis at temperatures down to the lowest have shown, that we may regard the double refraction as rigorously constant. Thus we can give for the index at the low temperatures the same value as at room temperature. For λ_{s_i} we assume the value 2370 Å. The contraction not being known we cannot take it into account. But at all events it is very small. In this way we find :

$$\begin{array}{ll} \text{at } 1.71^\circ \text{ K.} & (\epsilon_{s+} - \epsilon_{s-})_{\infty} = 4,37.10^{29} \quad (\eta_{s+} - \eta_{s-})_{\infty} = 1,37.10^{20} \\ \text{at } 4.21^\circ \text{ K.} & (\epsilon_{s+} - \epsilon_{s-})_{\infty} = 4,86.10^{29} \quad (\eta_{s+} - \eta_{s-})_{\infty} = 1,53.10^{20} \end{array}$$

The following must be remarked. When in a magnetic field the band (which is supposed to be the only one) is not split up into a multiplet, but only into a doublet (which is the general case for the crystals of the rare earths) ϵ_{s-} becomes zero in the limiting case of saturation and $(\epsilon_{s+})_{\infty}$ becomes identical with the coefficient ϵ_s that occurs in the expression of the index for a field-strength zero.

The old measurements ¹⁾ of the variation of the index with the aid of the absorption bands of the visible spectrum of tysonite gave values 10^5 to 10^6 times smaller. Thus the enormous paramagnetic rotation of the tysonite is related to the presence, in the distant ultraviolet, of a band (or of a group of bands) far more intense than the visible bands.

The bands of the visible spectrum are characteristic for neodymium and praseodymium. Therefore it is nearly certain, that the very intense band (or the group) that produced the enormous rotation belongs to cerium⁺⁺⁺. Tysonite contains a high percentage of cerium, only little neodymium and still less praseodymium. Moreover cerium-glass shows a strong paramagnetic rotation, while the rotation of praseodymium-glass and especially of neodymium-glass is very weak. It is therefore evident, that in tysonite the rotation due to the cerium so far predominates over the rotations due to the other rare earths, that the latter are negligible.

¹⁾ JEAN BECQUEREL, *le Radium* **4**, 383, 1907.

Physics. — *Notes on the law of the paramagnetic rotation of tysonite and tables of the paramagnetic rotatory power of some crystals.* By JEAN BECQUEREL and W. J. DE HAAS. (Comm. N^o. 199b from the Physical Laboratory at Leiden.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

In a preceding paper we showed that considering the paramagnetic rotatory power of tysonite as due to one single paramagnetic element, we are able to understand why the variation of this power as a function of $\frac{H}{T}$ is represented by a simple law. The law obtained by us is of great importance, the *hyperbolic tangent indicating with certainty a reversal of the sense of the magnetic moment*. Thus the mechanism of the magnetisation in the special case of the Ce^{+++} in the crystal, is known. But several questions remain open.

Finally it is not allowed to generalize the law of the hyp. tan. after one single example; especially not, as the value found for the moment (one Bohr magneton) may be a very special one. It may be the manifestation of simplified conditions, which may perhaps not be found with other ions or with other crystals. Cerium is the simplest of the rare earths, as it contains only one supplementary electron in the incomplete layer: the magnetic moment of the Ce^{+++} ion is due to this unique electron.

The value found for the magnetic moment determining the paramagnetic rotation of the tysonite is at any rate surprising as the measurements of the magnetisation of salts gave higher values of the moment of the ion C^{+++} . With a different method, from spectroscopic data, HUND¹⁾ gives 2.14 Bohr magnetons for the fundamental state, which is in agreement with the magnetisation measurements. Our result induces the idea of a simple reversal of the magnetic of the electron.

The following notes give hope, that more profound study of the magneto-optic-phenomena will develop to a great extent our knowledge of the mechanism of magnetisation.

The rotatory power is necessarily related with the unequal absorptions of circular vibrations of opposite sign. We must therefore concentrate our attention on the absorption bands and on the dissymetries in the absorptions

¹⁾ F. HUND, *Zs. f. Ph.* **33**, 857, 1925.

of the two circular vibrations. In the same way as the splitting up of the spectral lines into components in a magnetic field is an elementary diamagnetic phenomenon, the dissymmetries in the intensities of the circular components of opposite sign are (at least in most cases ¹⁾ a manifestation of an elementary paramagnetic phenomenon. This phenomenon is rendered visible in such a clear way, that any one who makes the observations (at very low temperatures) is led to the idea of the „reversals”.

Certainly very important data will be furnished not only by qualitative direct investigations, but also by quantitative ones of the unequal absorptions of the two circular vibrations in the visible spectrum for a great number of bands.

Complementary table giving the paramagnetic rotation of some crystals of rare earths.

$H = 26.73$ Kilo gauss. Thicknes 1 mm at room temperature. TYSONITE.					
$T = 1.39_4^\circ \text{ K.}$			$T = 1.71_4^\circ \text{ K.}$		
λ	ϱ degrees	mult. ϱ of π	λ	ϱ degrees	mult. ϱ of π
4259	—	—	4259	2689.8	14.943
5328.5	1547.1	8.595	5328.5	1471.5	8.175
$T = 1.95^\circ \text{ K.}$					
3830.4	3287.7	18.265	4168.7	2514.3	13.968
3864.2	3191.0	17.728	4222.9	2417.6	13.431
3899.1	3094.4	17.191	4282.2	2321.0	12.894
3939.9	2997.7	16.654	4344.8	2224.3	12.357
3979.5	2901.0	16.117	4414.0	2127.6	11.820
4022.4	2804.4	15.580	4486.9	2031.0	11.283
4068.7	2707.7	15.043	4564.3	1934.3	10.746
4116.6	2611.0	14.506	4742.6	1741.0	9.672

¹⁾ The dissymmetries in the intensities are sometimes rather complex, as it has been found that there are also dissymmetries in the intensities due to dissymmetries in position (J. B. 1e Radium 6, 327, 1909).

$T = 4.21^\circ \text{ K.}$								
λ	ϱ degrees	mult. of π	λ	ϱ degrees	mult. of π	λ	ϱ degrees	mult. of π
3738.5	2333.5	12.964				5300	853.5	4.742
3800	2208.8	12.271	4300	1502.5	8.347	5350	833.9	4.633
3850	2117.1	11.761	4327.5	1475.8	8.199	5400	814.6	4.526
3900	2030.7	11.282				5450	796.2	4.423
3958.5	1936.4	10.758	4766.7	1130.5	6.281	5500	778.4	4.325
			4800	1106.8	6.149	5550	761.7	4.231
4021.6	1839.6	10.220	4850	1075.3	5.974	5600	745.0	4.139
4050	1799.6	9.997	4900	1046.2	5.812	5650	729.8	4.054
4100	1732.7	9.626	4950	1019.3	5.663	5665.4	725.8	4.032
4150	1670.2	9.279	5000	995.2	5.529			
4200	1611.5	8.953	5019.9	986.1	5.478	5789.7 ¹⁾	643.7	3.576
4250	1556.2	8.646	5236.2	879.6	4.887	5916.6 ¹⁾	643.7	3.575
4256.7	1549.3	8.607	5250	874.0	4.855	6391.2	536.2	2.979
$T = 20.41^\circ \text{ K.}$								
3790	546.3	3.035				4750	281.2	1.562
3800	541.8	3.010	4277	379.4	2.108	4800	273.4	1.519
3850	520.7	2.893	4300	373.1	2.073	4850	266.3	1.479
3900	500.0	2.778	4350	360.8	2.004	4900	259.5	1.442
3950	480.6	2.670	4372	356.2	1.979	4950	252.8	1.404
3970	473.6	2.631				4968	250.5	1.392
3985	468.6	2.603	4428	343.5	1.908			
			4450	338.1	1.878	5432	198.6	1.103
4015	457.7	2.543	4500	327.7	1.821	5450	196.9	1.094
4050	445.2	2.473	4550	317.7	1.765	5500	192.7	1.071
4100	428.2	2.379	4600	308.0	1.711	5550	188.8	1.049
4150	412.3	2.290	4628	302.4	1.680	5600	185.1	1.028
4200	398.1	2.212				5635	182.6	1.014
4253	384.8	2.138	4728	284.9	1.583			

¹⁾ Region disturbed by the very active band 5776 Å.

$T = 20.41^\circ \text{ K. (Continued).}$

λ	ϱ degrees	mult. of π	λ	ϱ degrees	mult. of π	λ	ϱ degrees	mult. of π
5839	164.1	0.912	6150	148.1	0.823	6450	133.2	0.740
5850	163.6	0.909	6210	145.1	0.806	6500	130.7	0.726
5890	161.7	0.898				6550	128.2	0.712
5950	158.4	0.880	6262	142.7	0.793	6600	125.8	0.699
6000	155.7	0.865	6300	140.8	0.782	6650	123.6	0.687
6050	153.1	0.851	6350	138.2	0.768	6657	123.4	0.686
6100	150.7	0.837	6400	135.7	0.754			

 $T = 77.5^\circ \text{ K.}$

3883.3	153.7	0.853				6379.5	43.9	0.244
4015.3	136.6	0.759	5967.4	51.3	0.285	6430.8	43.1	0.240
4046.6	134.3	0.746	6018.95	50.2	0.279	6482.2	42.1	0.234
4215.5	119.1	0.661	6070.5	49.3	0.274	6535.5	41.2	0.229
4315.9	111.0	0.616	6135.0	48.1	0.267	6572	40.5	0.225
4447.4	101.4	0.563	6186.6	47.0	0.261	6597.7	40.3	0.224
						6790.3	37.4	0.208
5838.4	53.1		6276.8	45.6	0.253	6828.8	36.8	0.204
5890D ₂	52.5		6328.1	44.8	0.249	6854.5	36.5	0.203
5915.8	52.0							

PARISITE.

 $T = 4.21^\circ \text{ K.}$

4215	821.0	4.561	4550	652.3	3.624			
4250	799.6	4.442				5300	435.4	2.419
			4750	576.7	3.204	5350	424.8	2.360
4300	768.6	4.270	4800	560.6	3.115	5400	414.4	2.302
4350	741.6	4.120				5450	404.8	2.249
4380	726.9	4.038	4850	546.2	3.035	5500	395.7	2.198
			4900	531.6	2.953	5550	386.7	2.148
4500	673.3	3.741	4950	518.0	2.878	5600	378	2.100

$T = 4.21^{\circ} \text{ K. (Continued).}$								
λ	ϱ degrees	ϱ mult. of π	λ	ϱ degrees	ϱ mult. of π	λ	ϱ degrees	ϱ mult. of π
5650	369.2	2.051	6100	301.4	1.674	6300	276.4	1.535
			6150	294.4	1.636	6350	270.7	1.504
6000	314.9	1.749	6200	288.2	1.601	6400	265.2	1.473
6050	307.9	1.710						
$T = 14.10^{\circ} \text{ K.}$								
4300	278.4	1.547	4500	239.6	1.331			
4350	267.0	1.483	4550	232.3	1.290	4850	195.5	1.086
4380	260.9	1.450	4750	206.7	1.148	4900	190.4	1.058
			4800	201.0	1.117	4950	185.3	1.029
$T = 20.36^{\circ} \text{ K.}$								
4215	219.3	1.218	4850	138.0	0.767			
4250	212.9	1.183	4900	133.6	0.742	6000	85.5	0.475
			4950	129.6	0.720	6050	84.0	0.466
4300	204.6	1.137				6100	82.5	0.458
4350	197.2	1.096	5300	109.4	0.608	6150	81.0	0.450
4380	192.9	1.071	5350	107.1	0.595	6200	79.6	0.442
			5400	105.0	0.583			
4500	176.7	0.982	5450	103.1	0.573	6300	76.7	0.426
4550	170.5	0.947	5500	101.2	0.562	6350	75.4	0.419
			5550	99.5	0.553	6400	74.0	0.411
4750	147.7	0.821	5600	97.9	0.543	6450	72.7	0.404
4800	142.6	0.792	5650	96.3	0.535	6500	71.3	0.396
$T = 77.5^{\circ} \text{ K.}$								
4215	67.3	0.374				4350	62.2	0.346
4250	65.9	0.366	4300	64.0	0.356	4380	61.2	0.340

$T = 77.5^\circ \text{ K. (Continued).}$

λ	φ degrees	mult. of π	λ	φ degrees	mult. of π	λ	φ degrees	mult. of π
			5300	37.2	0.207	6100	24.9	0.138
4500	57.0	0.317	5350	36.3	0.202	6150	24.4	0.135
4550	55.4	0.308	5400	35.5	0.197	6200	23.9	0.133
			5450	34.5	0.192			
4750	49.7	0.276	5500	33.7	0.187	6300	22.9	0.127
4800	48.3	0.268	5550	32.8	0.182	6350	22.4	0.124
			5600	31.9	0.177	6400	22.0	0.122
4850	47.0	0.261	5650	31.1	0.173	6450	21.6	0.120
4900	45.7	0.254				6500	21.2	0.118
4950	44.5	0.247	6000	26.2	0.145	6550	20.8	0.116
			6050	25.5	0.142	6600	20.5	0.114

BASTNAESITE.

 $T = 4.21^\circ \text{ K.}$

4380	896.7	4.982	4850	674.5	3.747	5600	436.3	2.424
			4900	653.8	3.632	5650	426.8	2.371
4500	829.6	4.609	4950	631.2	3.507			
4550	805.0	4.472				5950	377.7	2.098
4600	782.9	4.349	5300	508.6	2.825	6000	370.3	2.057
4650	761.2	4.229	5350	493.8	2.743	6050	363.2	2.018
4700	739.4	4.108	5400	480.5	2.670	6100	356.3	1.979
4750	717.8	3.988	5450	468.0	2.600	6150	349.6	1.942
4800	695.6	3.864	5500	456.6	2.536	6200	343.2	1.907
			5550	445.9	2.477	6250	337.2	1.873

 $T = 14.17^\circ \text{ K.}$

4500	249.4	1.385	4750	203.5	1.131	4950	180.6	1.003
4550	239.0	1.328	4800	197.2	1.095			
4600	229.3	1.274				5300	148.2	0.823
4650	220.1	1.223	4850	190.6	1.059	5350	143.2	0.796
4700	211.8	1.177	4900	185.7	1.032			

$T = 77.5^\circ \text{ K.}$								
λ	φ degrees	φ mult. of π	λ	φ degrees	φ mult. of π	λ	φ degrees	φ mult. of π
4500	62.2	0.346	4950	47.3	0.263	5950	26.5	0.147
4550	60.2	0.335	5300	38.5	0.214	6000	25.8	0.143
4600	58.3	0.324	5350	37.3	0.207	6050	25.1	0.139
4650	56.6	0.314	5400	36.3	0.202	6100	24.4	0.136
4700	54.8	0.304	5450	35.2	0.195	6150	23.8	0.132
4750	53.2	0.295	5500	34.2	0.190	6200	23.2	0.129
4800	51.6	0.286	5550	33.2	0.184	6250	22.7	0.126
			5600	32.3	0.179	6300	22.0	0.122
4850	50.1	0.278	5650	31.4	0.174	6350	21.5	0.119
4900	48.5	0.269				6400	21.1	0.117

Physiology. — *Experimental contribution to the knowledge concerning the segmental innervation of the abdominal muscles in the dog.* (2nd Communication.) *The M. Obliquus Externus.* By Prof. G. VAN RIJNBEEK and Miss L. KAISER.

(Communicated at the meeting of May 25, 1929.)

ANATOMICAL INTRODUCTION.

Gross Anatomy.

In the dog the M. obliquus externus consists in one broad and flat layer of muscular tissue, arising cranial and dorsal from the 5th (6th) — 13th ribs with several heads. At the ventral side it is connected with the fascia of the rectus abdominis muscle by means of a tendinous membrane. Caudad the muscle becomes tendinous and is inserted into the pubic bone.

Its fibres run practically parallel, diverging slightly fan-like from dorso-cranial in caudoventral direction. We never saw fibrous partitions that might be looked on as inscriptions tendineae. The muscle can be considered as homologous to the internal intercostal muscles.

Peripheral innervation.

The obliquus externus muscle is innervated by branches of the lateral rami of the 5th (6th)—13th intercostal nerves, and by branches of the

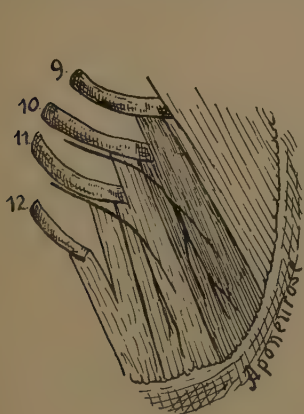


Fig. 1.

(After SEYDEL) Single nerve-muscle-territory (Orang) M. Obliquus from right side of body.

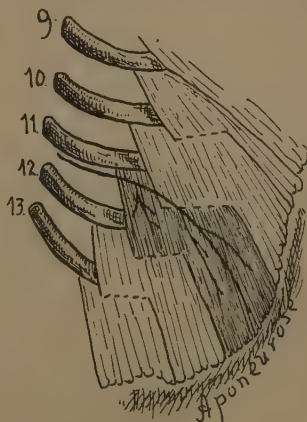


Fig. 2.

(After SEYDEL) Double nerve-muscle-territory (Troglodytes niger) M. obliquus from right side of body.

N. ileohypogastricus and *N. ileoinguinalis*. In some mammals (*Nictycebus*, *Cercopithecus*, *Lemur*, etc) the parts of the muscle innervated by the segmental nerve-branches form consecutive territories. But in other animals (*Cynocephalus*, *Inuus*) the segmental branches innervate two or more parts of the muscle not lying next to each other but have changed their respective positions. (Cf. a. o. SEYDEL¹).)

Many variations between those two extreme conditions may be seen. In the first case the muscle consists in a series of segmental nerve-muscle territories, following each other in cranio-caudal direction. In the second place at least two of such series can be found, the ventral series lying topographically caudad from the dorsal series, but from a segmental view point the ventral series is situated in a more cranial part of the muscle.

EXPERIMENTAL PART.

A. Method.

The research was carried out on 13 dogs.

The method used is chiefly the same as used and described in our communication on the *M. rectus abdominis*.

B. Results.

Stimulation of one of the ventral spinal roots partaking in the motor innervation of the *M. obliquus externus* always results in a contraction of one or two more or less clearly defined sections of the muscle. The contracting part assumes a somewhat darker aspect, it increases in thickness and its consistency becomes firmer. When several roots are stimulated consecutively, it can be felt and seen easily that the contracting part shifts its position. But from the caudal part of the muscle it is not very easy, to obtain a clear conception concerning situation, relation and exact extension of the various rhizomers.

1. Segmental boundaries of the muscle.

Once the cranial border of the muscle was found to be innervated by Th 3 and 4 (dog 26) once by Th 4 (dog 25) three times by Th 5 (dog 27, 42 and 46²). In dog 42 it could be ascertained that Th 3 and 4 did not partake in the innervation. The caudal border was innervated in eight cases by LII (dog 8, 9, 24 25, 26, 27, 42, 46). In four of those cases LIII did not partake in the innervation of this muscle; in the other cases this point was not investigated.

In two cases (dog 1 and 11) LII did not appear to partake in the innervation, LI innervating therefore the most caudal part of the muscle.

¹) O. SEYDEL, Ueber die Zwischensehnen und den metameren Aufbau des *M. obliquus thoraco-abdominalis* (abdominis) externus der Säugethiere, 1892.

²) Consecutive numbers were used for dogs from the rectus- and from the obliquus research.

A series of 11—13 roots therefore provides the innervation of the obliquus externus muscle in the dogs that were investigated by us.

Generally the roots Th. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 provide the innervation of muscle sections that are situated in a row one next to the other. In two cases (dog 24 and 27) Th 11 also innervated a single strip of muscle, but in six cases (dog 25, 26, 29, 42, 44, 46) a double one.

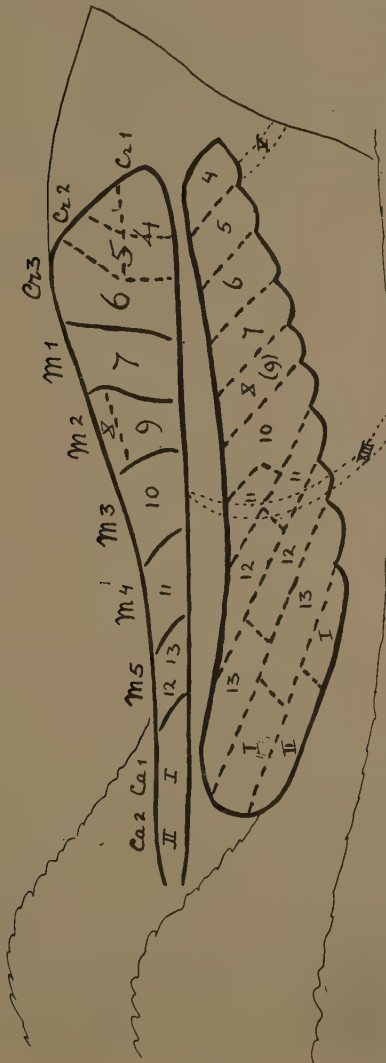


Fig. 4.

Relations between innervation of rectus and obliquus muscle in dog 25. *Top*: M. rectus. *Bottom*: M. obliquus. V, XIII: ribs.

The next roots: Th 12, 13 innervated in all cases two strips of muscle that had shifted their position in cranial-caudal direction over the width of a rhizomere, and were no longer lying side by side. The same is true in case of LI, with the exception of one case (dog 29), in which the section innervated by this root was single. The territories innervated by those roots therefore must be divided in a ventral and dorsal rhizomeric section. LII usually innervates a single section, apparently homologous with the ventral rhizomeric section of the roots immediately preceding.

In one case (dog 24) LII also had two separate rhizomeric sections. In the same dog Th 11 innervated on the contrary a single rhizomere. The ventral rhizomeric sections are situated topographically caudad to the corresponding dorsal rhizomeric sections. From a segmental point of view they occupy a more cranial territory than the dorsal rhizomers.

A tabel shows the relations as found by us.

TABLE.

Dog	Single muscle territory	Double muscle territory
24	Th 6, 7, 8, 9, 10, 11	Th 12, 13 L I, II
25	Th 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 L II	Th 11, 12, 13 L I
26	Th 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 L II	Th 11, 12, 13 L I
27	Th 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 L II	Th 12, 13 L I
29	Th 6, 7, 8, 9 L I	
42	Th 5, 6, 7, 9, 10 L II	Th 8, 11, 12, 13 L I
44	Th 7, 8, 9,	Th 10, 11, 12
46	Th 5, 6, 7, 8, 9, 10 L II	Th 11, 12, 13 L I

3. Some special questions.

a. In the investigation of this muscle attention is drawn to the roots Th 8 and 9. In the rectus muscle Th 9 always innervates the same muscle part, M 2, and Th 8 almost never innervates an independent part of the muscle, and sometimes does not partake in the innervation at all, but in the obliquus muscle Th 8 always innervates an independent part of the muscle, and stimulation of Th 9 sometimes may yield but a very slight result. Furthermore, Th 8 and 9 may distribute their branches through the same territory of the obliquus.

b. Attention is drawn to that section of the obliquus muscle where single and double rhizomeres are situated side by side. The relations as found by us may be easiest understood with the help of a few diagrams (See Fig. 3).

c. A comparison of the innervation of rectus and obliquus shows, that

the segmental scope of both muscles is about the same. Specially the caudal border of both muscles is constant and the same (LII). The number of roots partaking in the innervation also in both muscles is the same. Meanwhile, Th 8 and Th 12 do not send branches to an independent

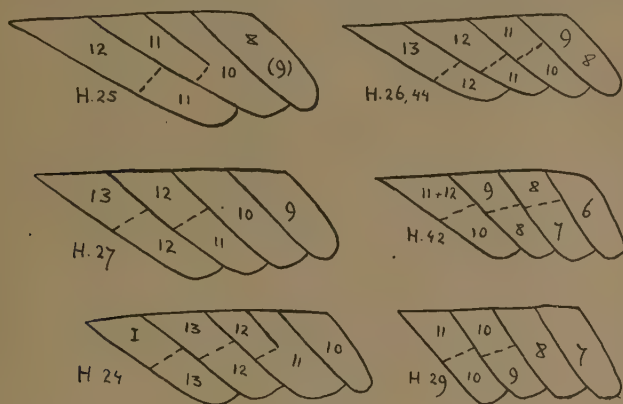


Fig. 3.

Diagrams to explain the changing of single nerve-muscle-territories into double. The figures represent a part of a left oblique muscle from a dog lying on its back.

part in the rectus muscle, and on the other hand, all roots partaking in the innervation of the oblique muscle spread in separate territories.

d. The problem of overlapping could not be cleared further by studying the oblique muscle, since the boundaries of contracting parts are difficult to determine; but overlapping appears to be an exception: once (dog 42) we found Th 11 and 12 innervating a common muscle territory, the same being the case with the rectus muscle of this dog. Sometimes we noticed (as stated under 3a) that Th 9 supplied nerve fibres to a territory, partly belonging to Th 8.

SUMMARY.

1. The M. oblique externus in the dog is innervated by an uninterrupted series of 11—13 ventral (motor) spinal roots: Th (3, 4) 5—LII.

2. No segmentation by fibrous segments is visible in this muscle. The territories of the cranial roots Th (3, 4) 5—7 always consist in single muscular sections, situated in a consecutive row in cranial-caudal direction. From Th 12, 13 and LI on the other hand fibres are sent into two muscular sections, a dorsal and a ventral one, which sections are absolutely separated. The dorsal division of the muscular section innervated by those roots is

situated caudad as to the ventral division. The territory of LII apparently consists in a medial (ventral, cranial) part of the rhizomere only. The rhizomeres of Th 8, 10, 11 may be single or double.

3. Th 8 always partakes in the innervation of the M. obliquus externus, Th. 9 only to a slight degree.

4. Overlap does hardly exist in the M. obliquus externus. In one case, however, Th 11 and 12 were found to supply a common territory, and in a few cases Th 9 sent fibres into a part of the territory of Th 8.

Chemistry. — *Die Pseudo-komponenten des Wasserstoffs.* Von Prof. A. SMITS. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

Die gleichzeitig erschienenen Mitteilungen von BONHOEFFER und HARTECK ¹⁾ und von EUCKEN ²⁾ veranlassen mich folgendes zu bemerken.

Die Theorie der Allotropie, welche 1910 aufgestellt wurde ³⁾ beruht auf die Annahme, dass jede Phase eines sogenannten einfachen Stoffes verschiedene Molekülarten (Pseudo-komponente) enthält, welche im festen Zustand Mischkristalle bilden.

Sind diese Molekülarten mit einander in innerem Gleichgewicht so verhält sich der Stoff unär d.h. wie ein System einer Komponente.

In 1923 habe ich darauf hingewiesen, dass die Verschiedenheit zwischen den verschiedenen Molekülarten in vielen Fällen auf eine Verschiedenheit zwischen den Atomen zurück zuführen ist und dass die neueren Anschauungen über Atombau erkennen lassen, dass zwischen den verschiedenen Atomen sehr feine Unterschiede möglich sind, welche z.B. mit einer Aenderung der Quantenzahlen der Valenz-elektronenbahnen zusammen hängen, sodass dieses zu Molekülarten mit viel feineren Unterschieden führt als bei gewöhnlichen Isomeren angenommen wird ⁴⁾.

In meinem Laboratorium wurden in verschiedenen Richtungen Versuche angestellt um diese Theorie zu prüfen und es wurde schon in verschiedenen Fällen deutliche Bestätigungen gefunden und gezeigt, dass eine sogenannte einfache Substanz sich in der Tat wie ein Gemisch verhalten kann.

Weil das Studium bei sehr tiefen Temperaturen mir viel Aussicht für die Prüfung der Theorie zu versprechen schien, beabsichtigte ich schon in 1922 festen und flüssigen Wasserstoff in der Umgebung des Tripelpunktes in dieser Richtung zu studieren.

Obwohl KAMERLINGH ONNES mir bereitwilligst seine Hilfe versprach, wurde dieser Plan jedoch wegen Zeitmangels nicht ausgeführt.

Inzwischen kam HEISENBERG ⁵⁾ auf rein theoretischen Weg zu dem Schluss, dass es zwei Molekülarten des Wasserstoffs gibt, von denen die eine Molekülart eine in den Kernen symmetrische und die andere eine

¹⁾ Nat. Wissenschaften **17**, 182 (1929).

²⁾ Nat. Wissenschaften **17**, 182 (1929).

³⁾ Siehe „Die Theorie der Allotropie“ und ebenfalls die etwas später erschienene Englische und Französische Ausgabe, und für die neuere Literatur „Allotropie und inneres Gleichgewicht“ Z. f. phys. Chem. **129**, 33 (1927) und „The influence of intensive Drying on inner Equilibria III“ J. Chem. Soc. 1928, 2399.

⁴⁾ Ber. d. Math. Phys. Klasse der Sachs. Akad. d. Wissenschaften Leipzig **75**, 58 (1923). Versl. Kon. Akad. v. Wetenschappen Amsterdam, **32**, 349 (1923).

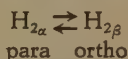
⁵⁾ Z.f. Phys. **41**, 239 (1927).

antisymmetrische Eigenfunktion besitzt. Und während die symmetrische nur Rotationsquanten von gerader Laufzahl aufzunehmen vermag, kann die antisymmetrische nur solche von ungerader Laufzahl aufnehmen.

Hier gilt es also auch Molekülarten mit *feinen Unterschieden* deren Existenz von mir *im allgemeinen* in 1923 für möglich erachtet wurden.

Dass es sich in der Tat um zwei Molekülarten handelt, welche wie die Theorie der Allotropie aussagt, als die Pseudo-komponenten des Wasserstoffs zu betrachten sind und die also bei unärem Verhalten des Wasserstoffes mit einander in innerem Gleichgewicht sind, das ist durch Berechnungen von DENNISON ¹⁾ über den Abfall der Rotationswärme wahrscheinlich gemacht und jetzt durch die Experimente von BONHOEFFER und HARTECK ²⁾, und sehr überzeugend durch die Versuche von EUCKEN ³⁾ sichergestellt.

Wir können jetzt behaupten, dass experimentell nachgewiesen ist, dass Wasserstoff zwei Molekülarten $H_{2\alpha}$ und $H_{2\beta}$ enthält, welche die Pseudo-komponenten des Systems Wasserstoff darstellen. Und nur wenn sich der Wasserstoff *unär verhält* hat sich entweder das innere Gleichgewicht

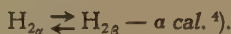


eingestellt, oder man arbeitet mit einem *Nicht-Gleichgewichts-Zustand*, welcher nur *eine* der Pseudo-komponenten enthält.

In allen anderen Fällen studiert man ein Pseudo-binäres System, und dieses wird hier beinahe immer der Fall gewesen sein, denn ohne Katalysator und bei relativ niedrigem Druck scheint das innere Gleichgewicht sich nur sehr langsam einzustellen.

Ist $H_{2\alpha}$ die symmetrische (para)- und $H_{2\beta}$ die antisymmetrische (ortho)-Pseudo-komponente, dann weisen die Versuche EUCKENS darauf hin, dass das innere Gleichgewicht, welches bei gewöhnlicher Temperatur an der β -Seite (75 % β) liegt, bei Temperaturerniedrigung bis zu -190° sich ungefähr nach der Mitte verschiebt, welches mit dem grösseren Energieinhalt von β , die antisymmetrische Pseudo-komponente, in Uebereinstimmung ist.

Also können wir schreiben,



Weil β , die symmetrische Pseudo-komponente sich bei Zimmertemperatur und Atmosphären Druck nur sehr langsam umwandelt und flüssiger Wasserstoff nach einem Tag schon eine beträchtliche Anreicherung der α (para) Pseudo-komponente zeigt, scheint die Trocknung, welche eine so tiefe Abkühlung bewirkt, nicht genügend zu sein um die inneren Umsetzungen zu hemmen.

¹⁾ Proc. Royal Soc. 115, 483 (1927). (Siehe auch F. HUND Z. f. Phys. 42, 93 (1927)).

²⁾ L.c.

³⁾ L.c.

⁴⁾ Eine Berechnung zeigt dass α von der Grössenordnung 300 ist.

In einer Abhandlung welche ich 27 März der Redaktion einer ausländischen Zeitschrift zusandte, welche aber leider stark verspätet erscheinen wird, schrieb ich folgendes :

„Ohne besondere Hilfsmittel gelingt es hier also experimentell dar zu tun, dass die sogenannte einfache Substanz, Wasserstoff, sich wie ein *Gemisch* verhält und hier wird es wahrscheinlich gelingen zu realisieren, was ich erst nach intensiver Trocknung für möglich hielt, nämlich eine oder beide Pseudo-komponenten, für kurze Zeit wenigstens, in reinem Zustand zu isolieren ¹⁾).

Jetzt erhebt sich noch eine andere interessante Frage.

Wenn Wasserstoff fest wird muss nach der Theorie der Allotropie eine *Mischkristallphase* entstehen, in welcher nur bei unärem Verhalten die zwei Molekülararten ebenfalls in innerem Gleichgewicht sind.

Eine schöne Aufgabe ist es jetzt dieses auch bei Wasserstoff zu prüfen. Es scheint möglich die reine α -Pseudo-komponente, para, zu isolieren und wenn man diese erstarren lässt, wird man eine feste Phase erhalten, welche von dem gewöhnlichen festen Wasserstoff verschieden ist. Wenn wie BONHOEFFER und HARTECK erwähnen diese letzte feste Phase 75 % ortho enthält werden diese beide Phasen, fester $H_{2\alpha}$ und fester gewöhnlicher Wasserstoff, wieder verschieden sein von dem festen Wasserstoff, welche sich *wirklich* in innerem Gleichgewicht gestellt hat.

Dass fester gewöhnlicher Wasserstoff 75 % ortho enthält kann aber nur dann als zweifellos festgestellt betrachtet werden, wenn gasförmiger gewöhnlicher Wasserstoff nach schneller Verfestigung und rascher restloser Verdampfung keine Aenderung in der Zusammensetzung zeigt.

Interessant wird es sein die verschiedenen festen Zustände des Wasserstoffes deren nur einer stabil ist, Röntgenografisch zu untersuchen.

Wie bekannt haben wir bei der festen asbestartigen Modifikation des Schwefeltrioxyds ähnliche Versuche ausführen wollen. Durch teilweise Verdampfung dieses Stoffes könnten wir feste Phasen von sehr viel niedrigerem Dampfdruck erhalten, weil die flüchtigere Molekülarart mehr oder weniger abdestilliert war.

Als wir aber die erhaltenen festen Phasen von verschiedenem Dampfdruck mittels Röntgenanalyse näher studieren wollten, stellte sich heraus, dass das innere Gleichgewicht sich unter den Einfluss der X-Strahlen rasch einstellte, so dass immer dasselbe Röntgenogramm erhalten wurde ²⁾).

Ungeachtet dessen beabsichtigen wir jetzt Röntgenogrammen der *verschiedenen* festen Wasserstoff-Zustände auf zu nehmen, obwohl es ganz unsicher ist, dass uns dieses gelingen wird. Es ist nämlich sehr gut möglich, dass auch hier die Röntgenstrahlen eine rasche Einstellung des inneren Gleichgewichts bewirken.

Ein anderes Problem ist die Feststellung des Typus des Pseudo-systems

¹⁾ Z.f. Phys. Chemie **100**, 477 (1922).

²⁾ J. Chem. Soc. 1926, 1120, 1603.

und dieses wird wahrscheinlich sehr gut möglich sein. Wir können aber jetzt schon sagen, dass eben, weil dieser einfachste Stoff, welchen wir kennen, aus Pseudo-komponente feinsten Unterschiede besteht, der Wasserstoff wohl die schönste Bestätigung der Prinzipien liefert auf welche die Theorie der Allotropie beruht.

Ohne Zweifel wird man auch bei anderen sogenannten einfachen Stoffen die Komplexität entdecken und die Pseudo-komponente kennen lernen."

Seit ich diese Worte schrieb haben BONHOEFFER und HARTECK ¹⁾ neue Resultate publiziert. Sie haben in der Tat die α -Pseudo-komponente, Para-wasserstoff, dargestellt und beobachtet dass, während der „Tripelpunkt“ des gewöhnlichen Wasserstoffs bei 13.95° abs. und 53.9 mm Hg liegt, dieser Punkt für die α -Pseudo-komponente, Para-wasserstoff, ein wenig tiefer, nämlich bei 13.82° abs. und 53.0 mm Hg liegt.

Weiter wurde gefunden, dass während der Siedepunkt des gewöhnlichen Wasserstoffes bei 20.39° abs. liegt, der Para-wasserstoff unter Atmosphärendruck bei 20.26° siedet.

Wir wissen aber leider noch nicht sicher was wir hier unter gewöhnlichen Wasserstoff verstehen müssen. Wenn der Wasserstoff z.B. in einem Platingefäss untersucht worden war, dann wurden die obengenannten Zahlen für gewöhnlichen Wasserstoff, den Wasserstoff in innerem Gleichgewicht betreffen und dann wurde der Dampf beim Tripelpunkt mehr als 50 % Para erhalten, aber jetzt sind wir noch ganz im Ungewissen. Es ist aber jetzt so gut wie sicher dass gewöhnlicher fester Wasserstoff eine ausser innerem Gleichgewicht sich befindende Mischkristallphase ist, welche bei totaler Erstarrung 75 % der β -Pseudo-komponente enthalten wird.

In diesem Fall besitzt der gewöhnliche Wasserstoff nicht, wie man fehlerhaft meint, einen Tripelpunkt doch es muss ein *Temperatur und Drucktrajekt* bestehen, über welche der feste Phase unter ihre Dampfdruck schmilzt. Man muss daher einen Beginn- und einen Endschmelzpunkt auch unter den Dampfdruck finden, welche deutlich auseinander liegen können.

Aber nicht nur bei festem gewöhnlichem Wasserstoff, sondern auch bei Wasserstoff, welchen man längere Zeit bei z.B. -190° aufbewahrt hat, wird ein Schmelztrajekt auftreten müssen, weil, wenn nicht ein kräftiger Katalysator anwesend ist, das innere Gleichgewicht sich während der Schmelzung nicht einstellen kann.

Die Resultate von GIAUQUE und JOHNSTON ²⁾ bei ihrem speziellen Wasserstoff erhalten, welche aber von ihnen, meiner Einsicht nach, nicht richtig gedeutet sind, weisen sehr deutlich in dieser Richtung. Bei sehr exakten Untersuchungen muss bei *gewöhnlichem* Wasserstoff ohne Zweifel dasselbe Verhalten gefunden werden.

Betrachten wir, wie ich dieses in der Theorie der Allotropie schon oft getan habe, die Projektion der Gleichgewichte zwischen Dampf—Fest—

¹⁾ Nat. wissenschaften **17**, 321 (1929).

²⁾ J. Amer. Chem. Soc. **50**, 3221 (1928).

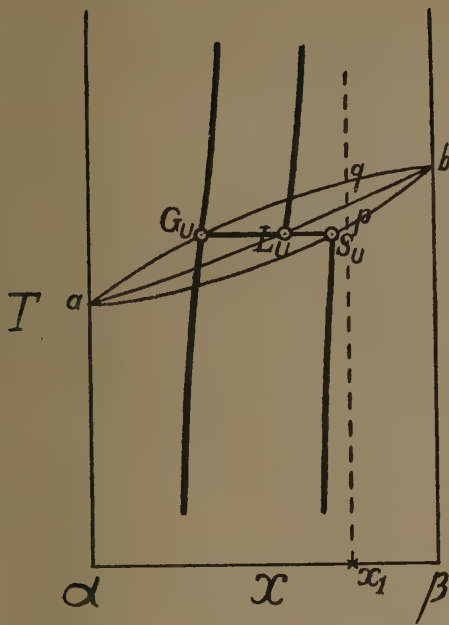


Fig. 1.

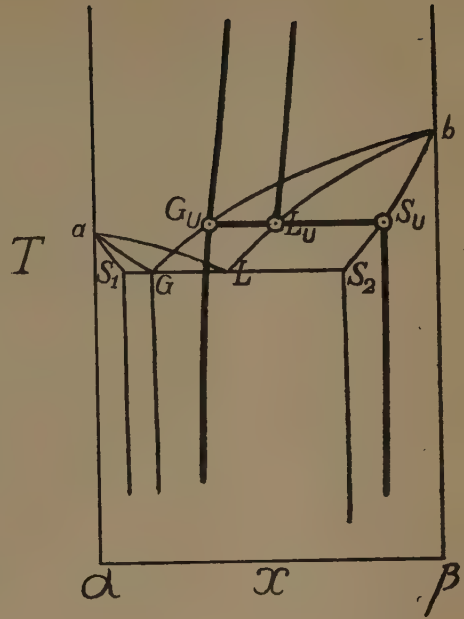


Fig. 2.

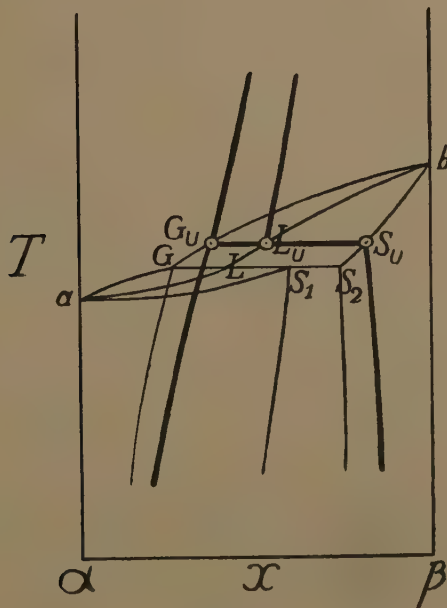


Fig. 3.

Flüssig auf der T, X -Ebene, dann lassen sich der Hauptsache nach drei möglichen Fällen unterscheiden, welche hier in den Figuren 1, 2 und 3 angegeben sind ¹⁾.

In diesen Figuren ist das Pseudo-System, wie immer, mit schwachen und das darin liegende unäre System mit starken Linien angegeben.

Die koexistierenden Phasen bei der Tripelpunktstemperatur und bei unärem Verhalten sind mit G, L und S verzeichnet. In Fig. 1 ist angenommen, dass die zwei Zustände des Wasserstoffs im festen Zustand in allen Verhältnissen mischbar sind, während in Fig. 2 und Fig. 3 die Mischungsreihe unterbrochen angenommen ist. Es leuchtet ein, dass, weil die Pseudokomponenten hier durch sehr feine Differenzen von einander unterschieden sind, die Distanz der verschiedenen Linien klein und die T, X -figur stark zusammen gepresst sein kann. Zu welchem Typus der Wasserstoff gehört lässt sich noch nicht entscheiden und das eigenthümliche ist jetzt, dass wir von der ganzen T, X -figur *nur einen Punkt* kennen, nämlich den Punkt a , der Tripelpunktstemperatur des Para-wasserstoffs, und *nur* in der Voraussetzung, dass es in der Tat gelungen ist der α -Pseudo-komponent, Para-wasserstoff, in *vollkommen* reinem Zustand zu erhalten und zu behalten.

Wenn der gewöhnliche feste Wasserstoff, wie sehr wahrscheinlich ist, die Zusammensetzung 75 % ortho hat, so wird, wie beispielsweise in Fig. 1 angegeben ist, die Schmelzung maximal über den Temperaturtrajekt p, q .

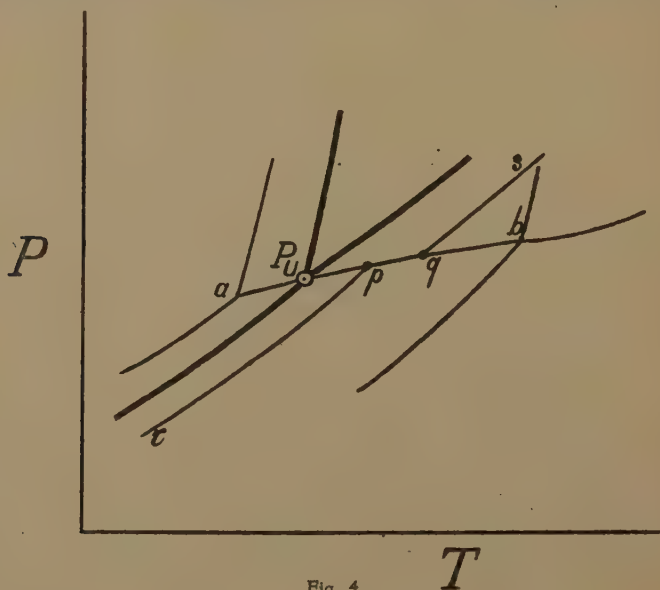


Fig. 4.

¹⁾ Siehe Die Theorie der Allotropie. Seite, 18 u. 19. z.B.

stattfinden, und in den Fällen durch Fig. 2 und Fig. 3 angegeben, kann der Maximum-Temperaturtrajekt relativ sehr grosz sein.

In Fig. 4 ist die $P . T$ -Projektion angegeben, welche mit dem Fall Fig. 1 übereinstimmt, woraus sich ergibt, dass, während P_u der unäre Tripelpunkt ist, die $P . T$ -figur der Gleichgewichten mit einer Dampfphase für den gewöhnlichen Wasserstoff aus den Linien rp , pq und qs besteht.

Die Lagen der Linien rp ($S + G$) und qs ($L + G$) sind *abhängig* vom Volum und dadurch ist auch die *Länge* der Dreiphasenlinie pq (für $S + L + G$), vom Volum abhängig, sodass, wenn man das Volum willkürlich ändern kann, man bei jeder Zusammensetzung verschiedene-Schmelztrajekte beobachten kann.

*Laboratorium voor Algemeene en Anorganische
Chemie der Universiteit.*

Amsterdam, Mai 1929.

Chemistry. — *Expériences sur l'activité du plomb provenant du toit de l'Observatoire à Paris.* Par Prof. A. SMITS et Mlle C. H. MAC GILLAVRY. (Communicated by Prof. P. ZEEMAN).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

Nous avons déjà annoncé dans notre publication dans le *Zeitschr. f. Elektrochemie* **34**, 350 (1928) que nous nous occupons de vérifier les résultats annoncés par Mlle S. MARACINEANU au sujet de l'activité du plomb exposé à la radiation solaire.

Nous croyions que ces résultats étaient peut-être de grande importance parce que si vraiment le plomb s'active et émet des particules α , il est vraisemblable qu'il y a une transmutation de plomb en mercure.

Nous avons commencé par mesurer à l'aide de l'électromètre extrêmement sensible de Szilard l'activité d'un disque en plomb de la toiture de l'Observatoire de Paris envoyé par M. DESLANDRES et nous avons pu constater que le côté qui avait été exposé au soleil était radioactif, tandis que le côté opposé ne présentait pas de radioactivité. Les mesures étaient faites par comparaison avec un disque étalon en aluminium et les valeurs trouvées étaient en concordance avec celle de Mlle MARACINEANU. Durant une année nous avons constaté que cette activité n'avait pratiquement pas changé.

Les résultats sont les suivants. (Tableau 1).

Ce qui nous intéressait le plus dans cette question était la nature du rayonnement émis par le plomb.

Or dans une note, Mlle MARACINEANU ¹⁾ avait annoncé qu'elle observait une émission de particules α par les scintillations produites sur un écran de sulphure de zinc.

Il était donc de grande importance de vérifier aussi ce phénomène.

Parce que Mlle MARACINEANU avait reçu l'impression que l'humidité pourrait avoir peut-être une influence sur la sensibilité de l'écran, nous avons construit un petit appareil pour pouvoir désécher l'écran à l'aide d'un déséchant puissant tel que le sodium pendant l'observation, et de garder une petite distance d'environ 3 mm. entre le disque en plomb et l'écran.

La figure 1 représente l'appareil en section transversale. Le diamètre du disque en plomb était 15 cm. et celui de l'appareil d'une vingtaine de c.m.

¹⁾ C.R. de l'Académie d. Sciences **181**, 774 (1925). ("Note présentée par M. DESLANDRES").

Dans nos nombreuses séries de mesures nous avons utilisé du sulphure de zinc de deux provenances différentes ; 1 sulphure de zinc d'Allemagne

TABLEAU 1.

Temps de décharges pour 5 divisions de micromètre ¹⁾		Différence avec la valeur probable	Valeur probable	Faute moyenne
Al	193	— 12	205	2.1
	216	+ 11		
	207	+ 2		
	199	— 6		
	203	— 2		
Pb Côté face	60	0	60	0.9
	66	+ 6		
	55	— 5		
	61	+ 1		
	61	+ 1		
Al	200	— 21	221	3.0
	218	— 3		
	232	+ 11		
	221	0		
	229	+ 8		
Pb Côté envers	221	— 2	223	2.0
	222	— 1		
	233	+ 10		
	222	— 1		
	210	— 13		
Al	218	— 6	224	1.2
	224	0		
	229	+ 5		
	226	+ 2		
	218	— 6		

¹⁾ Une division de micromètre = 0.11 Volt.

(Chinine Fabrik Braunschweig) et 2. sulphure de zinc de France (Radiana C. 24). Pour obtenir des résultats complètement convaincants il était

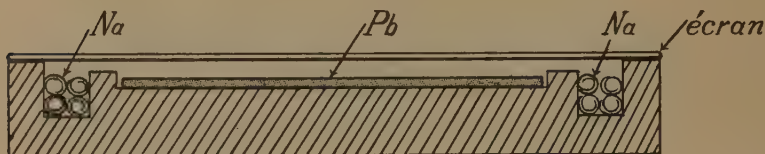


Fig. 1.

nécessaire d'examiner après l'écran seul les deux côtés du disque en plomb avec une exactitude aussi grande que possible à l'aide d'une loupe de très court foyer et d'un diamètre de 3 cm. La loupe était fixée dans un tube qui permettait de la mettre préalablement au point.

Nous étions quatre personnes à observer à tour de rôle et une cinquième nous posait l'écran et le disque en plomb sans que nous sachions quelle était la face que nous observions. Nous comptions le nombre des scintillations par minute et chacun inscrivait les résultats sur un papier à l'insu des autres. A la fin de la séance on se communiquait les nombres obtenus.

Les résultats concordaient très bien et indiquaient toujours que le plomb côté face donnait des scintillations, tandis que le côté envers ne les donnait presque pas. En général l'écran utilisé était exempt de scintillation, ou bien donnait une ou deux par minute. L'observation est délicate et demande de l'exercice et beaucoup d'attention.

Parceque l'écran fait avec le sulphure de provenance française, C. 24, était le mieux réussi, nous avons employé cet écran pour la plupart de nos expériences, mais nous avons vérifié que le sulphure de provenance allemande donne le même résultat. Le nombre des scintillations obtenu est donné dans les tableaux 2 et 3 ci-joints.

TABLEAU 2.

Nombre des scintillations par minute. Écran de Sulphure de Zinc de Paris.

Ecran seul	Côté face	Côté envers
0 1 0 1 1	3 5 5 2 6	2 1 2 0 0
0 0 1 0 2	8 10 3 4 8	1 0 0 0 2
0 1 0 0 0	7 5 7 1 3	0 1 1 1 0
0 0 1 2 0	8 4 4 12 6	0 1 0 1 0
0 0 0 0 1	7 5 10 16 4	0 0 0 0 1

TABLEAU 3.

Ecran de Sulphure de Zinc du Chinine Fabrik.

Ecran seul	Côté face	Côté envers	Ecran seul
1	7	0	2
2	12	2	1
0	9	0	2
0	4	1	1
1	8	2	2

Ces résultats ont été obtenus avec un disque en plomb coupé, il y a deux ans, du toit de l'observatoire de Paris. Ce disque avait été lavé au savon et brossé énergiquement à l'eau courante et donnait dans notre électromètre des résultats semblables à ceux obtenus dans nos mesures ci-dessus publiés du plomb de même provenance.

De ces expériences il résulte, que le côté face émet des particules α et que le courant d'ionisation, accusé par l'électromètre, doit être expliqué par cette émission.

Cela peut-être montré davantage par un calcul provisoire. Pour l'appareil Szilard 1. div. micr/sec. = 0.0014 E.S. En éliminant le temps de décharge de l'appareil seul, l'électromètre est déchargé par le côté face du plomb par 5 divisions en 90 sec. Ceci correspond avec une quantité d'électricité de $\frac{5}{90} \cdot 0.0014$ E.S/sec.

Cette quantité est produite par $1,6 \cdot 10^5$ ions. Supposant qu'une particule α donne 10^5 ions on trouve que 1,6 particules α sont émises par sec. sur toute la surface.

Le rayon du plomb étant 7 cm., celui de la loupe 1.5 cm., on peut expecter 4 à 5 scintillations par minute.

Parceque ce phénomène nous semblait très important, nous avons organisé de nouvelles expériences pour prouver qu'il est dû en réalité au rayonnement solaire et non pas à la poussière atmosphérique, malgré que Mlle MARACINEANU a fait déjà des expériences intéressantes qui parlent en faveur de l'interprétation d'un effet solaire.

Pour avoir des résultats décisifs nous exposons au rayonnement solaire des disques en plomb dans des boîtes en quartz bien scellées et nous espérons pouvoir éclaircir la question au courant de cette année.

*Laboratoire de Chimie Générale et anorganique
de l'Université d'Amsterdam.*

Amsterdam, 19 Mai 1929.

Botany. — *Ueber das Wachstum der Koleoptile und des Mesokotyls von Avena sativa unter verschiedenen Aussenbedingungen.* (Vorläufige Mitteilung.) Von H. G. DU BUY und ERICH NUERNBERGK. (Communicated by Prof. F. A. F. C. WENT.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

Wenn man es versucht, sich mit Hilfe der in der Literatur vorhandenen Angaben ein einheitliches Bild über den Einfluss des Lichtes oder anderer Faktoren auf das Wachstum des Avenakeimlings zu machen, so kommt man bald zu der Einsicht, dass das infolge der grossen Lückenhaftigkeit unserer Kenntnisse auf dem in Frage stehenden Gebiet äusserst schwierig ist. Als Hauptgrund für diese vielen Unsicherheiten möchten wir in erster Linie die bislang viel zu ungenaue Analyse der von aussen einwirkenden Faktoren, in zweiter Linie aber auch bei vielen Untersuchungen das Fehlen einheitlicher Gesichtspunkte ansehen, das manchen Autor seine Experimente auf Fundamenten aufbauen lässt, die in Wirklichkeit überhaupt nicht vorhanden sind. Dass dadurch natürlich das einwandfreie theoretische Verstehen der vielen, bei dem Haferkeimling bislang beobachteten interessanten Erscheinungen sehr erschwert wird, ist längst bekannt, und der folgende Beitrag mag daher als eine kurze Einleitung zu einer Reihe von Studien aufgefasst werden, in denen der Versuch unternommen wird, mit Hilfe moderner und möglichst exakter quantitativer Methoden eine wesentlich einwandfreiere und genauere Analyse der bemerkenswertesten Wachstumserscheinungen, die man bei dem Haferkeimling besonders unter dem Einfluss der Lichtstrahlung beobachten kann, zu geben.

In der vorliegenden Mitteilung möchten wir zunächst über zwei Punkte berichten, die uns als Ausgangspunkt der eben angedeuteten Untersuchungsziele besonders wichtig erscheinen, nämlich

1. die Erzielung einwandfreier Versuchspflanzen unter exakt definierten Bedingungen,
2. die Auffindung einer zuverlässigen und doch genügend bequemen Methode, mit deren Hilfe nachher die zu untersuchenden Wachstumserscheinungen praktisch gemessen und ausgewertet werden können.

Ad 1. Es ist bekannt, dass die Erzielung einwandfreier, d.h. gut reagierender und unter konstanter Lichtstimmung stehender Versuchspflanzen beim Hafer gar nicht so leicht ist, da die einfache Aufzucht der Keimlinge unter völligem Lichtabschluss in der Regel zu solchen Pflänzchen führt, bei denen das Mesokotyl mehr oder weniger stark ausgewachsen ist. Dieser Umstand ist aber bei später auszuführenden Wachstumsmessungen

ausserordentlich störend, da das Mesokotyl eine sehr grosse Neigung zur Ausführung jener bekannten Nutationen hat, unter deren Einfluss von der Koleoptile nachher alle möglichen Krümmungen ausgeführt werden, die eine auch nur einigermaßen exaktere Wachstums-messung oder gar Krümmungsangabe — bei tropistischen Studien — nahezu unmöglich machen. Es ist daher auch schon von verschiedenen Autoren der Versuch gemacht worden, den Grund und damit die Mittel zur Behebung dieser störenden Erscheinung ausfindig zu machen, aber im einzelnen laufen die diesbezüglichen Angaben ziemlich weit auseinander. SILBERSCHMIDT (1928) z. B., der die äusseren Einflüsse auf totale Länge und Wachstumsgeschwindigkeit des Haferkeimlings genauer untersucht hat, gibt hinsichtlich des Auswachsens des Mesokotyls nur an, dass „das Hypokotyl nur dann auszuwachsen pflegt, wenn der normale Gasaustausch von Wurzel oder Spross in irgendwelcher Weise gestört ist, eine Tatsache, worauf auch die Ergebnisse von M. DE VRIES (1917) zurückzuführen sind.“ Weiter gibt BEYER (1927, 1928) als Mittel, das Mesokotylwachstum zu beeinflussen, eine Vorbelichtung von bestimmter Dauer an, ohne im übrigen eingehender die ganze Sachlage zu untersuchen.

Für uns war es von Bedeutung, diese Erscheinung etwas allgemeiner zu studieren, besonders in Hinblick auf folgende beide Fragen:

1. Gibt es schon in den ersten Keimungsstadien Wachstumseinflüsse, die sich später auch noch geltend machen können?
2. Gibt es nicht eine Methode, die die Unterdrückung des Auswachsens des Mesokotyls erlaubt, ohne dass man zu dem Hilfsmittel der Vorbelichtung, dass eventuell die Lichtstimmung ungünstig beeinflussen kann, greifen braucht?

Des Raumes wegen können wir hier unsere Resultate nur summarisch und ohne Beifügung von theoretischen Erörterungen, die einer späteren, ausführlicheren Arbeit vorbehalten sein mögen, geben.

Benutzt wurde bei den hier beschriebenen Versuchen nur Siegeshafer von Svalöf, Ernte 1926. Die Früchte wurden entspelzt und sogleich 5 mm tief in runde, $2,5 \times 4 \varnothing$ cm messende, mit einem Bodenloch versehene Zinktöpfchen vertikal gepflanzt (auf 1 K.G. lufttrockene, gesiebte Gartenerde 40 ccm Wasser). Dann waren unsere *Kontrollpflanzen* folgendermassen definiert: Bei einer Aufzuchttemperatur von 22 Grad C. in einem Silberschmidtschen Holzthermostaten unter fortwährendem Lichtabschluss, einem Begiessen mit je 2 ccm Wasser nach 0, 2×24 und 4×24 Std., einer relativen Luftfeuchtigkeit von 70—85 % hatten die Kontrollen nach 5×24 Std. eine Koleoptillänge von 50—65 mm, eine Mesokotyllänge von 10—20 mm. (Fig. 1, Kurve *b* (Koleoptillänge) Kurve *b'* (Mesokotyllänge)).

Allgemeine Variation äusserer Bedingungen.

Die Versuchspflanzen wurden wie die Kontrollen behandelt, jedoch wurde

a. die Erdoberfläche der Töpfchen öfters aufgelockert.

b. die Pflanzen nicht in dem Holzthermostaten, sondern frei und offen in dem mit vorzüglicher Ventilation versehenen, von F. W. WEN^r (1928) zu seinen Versuchen gebrauchten Keller-Dunkelkammer aufgezogen. Sowohl bei a als auch bei b wuchs das Mesokotyl aus, sodass die von M. DE VRIES (1917) angegebenen Gründe für das Mesokotyl-auswachsen (übermässiger CO² Gehalt der Luft bzw. ungenügende Durchlüftung) sofern sie als allein wirkender Faktor in betracht kommen, von uns nicht bestätigt werden konnten.

c. Wurden andere Aussenbedingungen, wie Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt der Luft *allgemein* konstant geändert, so ergaben unsere Versuche stets solche Resultate, wie sie im grossen und ganzen bereits SILBERSCHMIDT (1928) gefunden hat. Nachdrücklich müssen wir aber betonen, dass unter keinen von diesen Umständen das Mesokotylwachstum ausblieb, ausgenommen natürlich bei Verabreichung einer konstanten Beleuchtung.

Zeitweise Variation äusserer Bedingungen.

a. Grössere Feuchtigkeit des Bodens in den ersten 48 Std. der Aufzucht vergrössert den Elevationswinkel der Wachstumskurve (Fig. 1), verfrüht ihren Anfangspunkt und vergrössert die Endlänge der Koleoptile.

b. Unmittelbar nach dem Pflanzen einsetzende 24-stündige Vorbeleuchtung mit einer 200, 100, oder 75 Watt Philips Opal-Lampe (Marke Argenta) aus 80 bzw. 35 cm senkrechter Entfernung beeinträchtigt allgemein die Endlänge des Koleoptils und Mesokotyls und erniedrigt den Elevationswinkel der Wachstumskurve.

c. Eine Beleuchtung von 24—48 Uhr (gerechnet vom Zeitpunkt des Einpflanzens der Früchte) mit einer 75 Watt Philips Opal-Lampe in 35—60 cm senkrechter Entfernung ergibt die unter b geschilderten Resultate, jedoch wird nunmehr auch das Wachstum des Mesokotyls *gehemmt*. Das Gleiche geschieht jedoch auch, wenn diese Lampe mit einem roten Lackanstrich versehen wird. Bei diesen Versuchen unter c stieg die Bodentemperatur in den Töpfchen während der Belichtung jedesmal von 22 Grad bis auf 30—34 Grad Celsius, auch trockneten die Töpfchen schnell aus. Das zuletzt genannte Ergebnis führte zur Anstellung der Versuchsreihe d.

d. 1. Von 38—48 Uhr wurden Töpfchen in ein Trockengefäss mit CaCl₂ gesetzt, und

2. Von 38—48 Uhr wurden andere Töpfchen in einen Raum mit einer relativen Luftfeuchtigkeit von 40 % gebracht.

In beiden Fällen hemmte das plötzliche Austrocknen des Bodens und der Luft *keineswegs* die Mesokotyl-Entwicklung!

Nachdem die Versuchsreihe d zeigte, dass in der Reihe c die Hemmung des Mesokotylwachstums nicht auf die Ursache der grösseren Boden-

feuchtigkeit zurückgeführt werden kann, blieb nunmehr als mögliche Ursache nur noch die *zeitweilige* Erhöhung der Bodentemperatur übrig. Zur genaueren Prüfung dieser Annahme wurden die Versuche der folgenden Reihe e angesetzt.

e. In diesen Versuchen werden die Töpfe während 6 Std. dauernd mit einem, 75 Watt verbrauchenden und nur langwellige Wärmestrahlen liefernden Radiator in ± 50 cm senkrechter Entfernung bestrahlt, wobei die Bodentemperatur dadurch ständig auf etwa 33 Grad C. gehalten wurde. (Als Radiator fungierte ein, ähnlich wie ein kleines Plätteisen gebauter elektrischer Heizkörper!) Die Bestrahlung setzte 16—40 Std. (bei 16 Std. anfangend) nach dem Einpflanzen der Früchte ein. Hierbei zeigte sich:

1. dass ein Mesokotyl-Wachstum nur dann unterblieb, wenn die Bestrahlung innerhalb der 38. bis etwa 44. Std. der ganzen Keimlingsentwicklung fiel;

2. dass eine Bestrahlung von mehr als ± 30 Std. Dauer das Mesokotyl-Wachstum nicht mehr hemmte; (eine „Anpassungserscheinung“, weil die Wachstumskurve dann sehr grosse Ähnlichkeit mit der W.-Kurve von Pflanzen aufweist, die bei 33 Grad C. aufgezogen worden sind).

3. dass die Bestrahlung die Endlänge um so weniger beeinträchtigte, je kürzer ihre Dauer war.

Als *günstigste Bestrahlungszeit* ergab sich schliesslich die *Bestrahlung von 40—47 Uhr* (33 Grad C. Bodentemperatur), vom Zeitpunkt des Einpflanzens an gerechnet. Für alle unsere weiteren Versuche haben wir dann auch solche Pflanzen gewählt, die auf diese Weise „mesokotylfrei“ gemacht worden waren. Die Wachstumskurve dieser Pflanzen ist in Fig. 1 unter c eingezeichnet.

Zur Prüfung darauf, ob die eben geschilderten Ergebnisse auch dann erzielt werden können, wenn man mit auf feuchtem Fliesspapier gekeimten Früchten arbeitet, wurden ferner noch etliche Versuche in dieser Richtung hin ausgeführt. Die Haferkörner wurden zuerst 3 Std. lang in Wasser geweicht und sodann ± 44 Std. lang auf feuchtes Filtrierpapier zum Keimen ausgelegt, ehe sie in die Töpfchen eingepflanzt wurden. Noch während sie sich auf dem Fliesspapier befanden, wurden sie der Wärmebestrahlung unterzogen, und zwar in Stadien der Entwicklung, welche denen der direkt in Erde gekeimten Früchte entsprach. Die Bestrahlung erfolgte daher etwa 20 Std. früher als bei den Erdepflanzen, da bekanntlich die ersten Keimungsstadien von auf Filtrierpapier gekeimten Früchten schneller durchlaufen werden.

Das Ergebnis dieser Versuche war das gleiche wie bei den direkt in Erde aufgezogenen Pflänzchen. d.h. es wurden wiederum mesokotylfreie Keimlinge erzielt, sodass sich unsere Methode, das Auswachsen des Mesokotyls zu verhindern, nicht nur für vollkommen in Erde aufgezogene, sondern auch für solche Pflänzchen eignet, deren Früchte zwecks schnellerer Aufzucht zuerst auf Filtrierpapier zur Keimung gelangen.

Wurden die keimenden Früchte aber nicht bestrahlt, so trat die

Mesokotyl-Entwicklung sehr wohl ein, wie auch aus der Wachstumskurve a bzw. a'. Fig 1. zu ersehen ist, die das Wachstum der „Filterpapierkeimlinge“ wiedergibt.

Die bisher geschilderten Bestrahlungsversuche mit Wärmestrahlen weisen deutlich darauf hin, dass in bestimmten Stadien der Keimentwick-

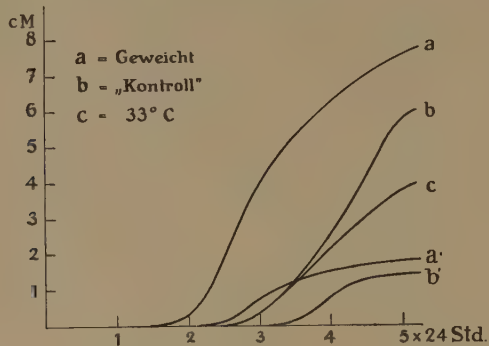


Fig. 1.

Der Wachstumsverlauf von Koleoptile und Mesokotyl von *Avena* unter verschiedenen Aussenbedingungen (siehe Text).

a, b = Koleoptile.

a', b' = Mesokotyl.

lung durch rein quantitative Energiezufuhr morphologische Differenzierungen begünstigt oder gehindert werden können. In Analogie mit gewissen ähnlichen Erscheinungen, die bei der Entstehung des Tagesschlafes der Pflanzen eine Rolle spielen, und bei denen der eine von uns gefunden hatte, dass man eine scharfe Trennung zwischen der rein quantitativ einwirkenden Energie einerseits und zwischen dem Einfluss qualitativer, resonatorisch angreifender Energie andererseits bei äusserlich vollkommen gleich verlaufenden Prozessen machen muss (E. NUERNBERGK, 1925), lag es natürlich nahe, derartige Gedankengänge auch auf die Keimungsphysiologie von *Avena* anzuwenden, zumal ja schon BEYER gezeigt hatte, dass man mit Hilfe von geeigneter Lichtbestrahlung gleichfalls die Mesokotylentwicklung beeinflussen kann. Genauere Experimente darüber waren schon deshalb nötig, weil die Beyersche Versuchsanstellung keineswegs eine genügend einwandfreie Trennung von Licht- und Wärmeeinfluss zulies, und andererseits der von uns oben (S. 00) beschriebene Versuch c klar zeigte, dass bei Beleuchtung einer Versuchsserie mit einer 75 Watt-Lampe die physiologische Wirkung der Beleuchtung fast ausschliesslich auf die von dieser Lampe in reichlichem Masse ausgestrahlte langwellige Wärmeenergie zurückzuführen war¹⁾. Wir haben daher neben den Wärmebe-

¹⁾ Dass in unseren Wärmeversuchen die Wärmestrahlung rein quantitativ, d.h. genau so wie durch Konvektion zugeführte Molekular-Wärme wirkte, und nicht etwa auch in der Art eines resonatorisch verlaufenden Prozesses, bei dem es auf die Wellenlänge der ultraroten Strahlung ankommt, ergibt sich schon aus der Tatsache, dass sich

strahlungsversuchen noch einige Lichtversuche ausgeführt, bei denen streng darauf geachtet wurde, dass keine Wärmestrahlung irgendwie auf die Pflanzen gelangte. Mit Hilfe einer grösseren Beleuchtungsapparatur, die der eine von uns demnächst anderen Orts genauer beschreiben wird, war es uns leicht möglich, intensive monochromatische Strahlung von genau definierter Intensität (Watt/cm^2) auf unsere Versuchspflanzen einwirken zu lassen, wobei die Wärmestrahlung durch CuSO_4 -Flüssigkeitsfilter *vollkommen* absorbiert wurde. Als Lichtquelle fungierte eine Quarz-Hg-Lampe, da es uns vor allem daran lag, festzustellen, ob das phototropisch besonders wirksame Blau auch einen stärkeren Einfluss auf die Mesokotylentwicklung auszuüben vermag. Die keimenden Früchte wurden teils bereits in Erde befindlich, den Lichtstrahlen ausgesetzt, grösstenteils aber direkt, auf feuchtem Fliesspapier liegend, der Strahlung exponiert, da sich gleich bei den ersten Versuchen herausstellte, dass die Absorption des Lichtes in der die Früchte bedeckende Erdschicht so gross war, dass nur bei extrem langen Belichtungszeiten überhaupt ein Lichteinfluss bemerkt werden konnte.

Im einzelnen wurden drei Versuchsserien angestellt, wobei die „Fließpapierpflänzchen“ genau die gleiche allgemeine Behandlung erfuhren, wie es bereits auf S. 00 bei den, der Wärmebehandlung unterzogenen analogen Serien beschrieben war:

Nach ± 24 Std. vom Beginn des Weichens an gerechnet, wurden die auf Fliesspapier liegenden Früchte:

f. mit dem gesamten *sichtbaren* Spektrum einschliesslich etwas U.-V. bis ≈ 3660 A.E. der Hg-Lampe bei einer Intensität von ca $405 \text{ Erg/cm}^2/\text{sec}$.

	Mesokotyllänge in mm
1. 4 Std. lang	10—20
2. 8 Std. lang	2—10
3. 14 Std. lang	0—(2)

belichtet (3. V. 29.)

Besondere Bemerkung: Die Endlänge der Koleoptilen nimmt mit der Strahlungseinfluss sehr wirksam durch die die keimenden Früchte bedeckende Erdschicht fortpflanzte, wo sicherlich die ursprünglich von dem Radiator ausgesandte Strahlung vollkommen absorbiert und in Molekular-Wärme umgesetzt worden ist. Ueberdies stellten wir aber noch einige Versuche an, wo die von dem Radiator ausgestrahlte Wärme noch eine 1—2 cm dicke Erdschicht passieren musste, ehe sie die Pflanzentöpfchen erreichen konnte. In allen Fällen war aber der physiologische Erfolg vollkommen der gleiche, sofern nur darauf geachtet wurde, dass die Temperatur der Erde, in der die Früchte keimten, 33 Grad C. betrug. Wir hätten uns daher an Stelle eines Radiators ebenso gut eines ganzen Thermostaten von 33 Grad Temperatur bedienen können, in den die Pflanzen zeitweilig gesetzt werden, um die Mesokotyl-Entwicklung wirksam zu unterdrücken.

Ferner sei noch kurz bemerkt, dass verschiedene Versuche klar zeigten dass eine Bodentemperatur von gerade 33 Grad C. die Mesokotylentwicklung unter sonst möglichst geringer allgemeiner Herabsetzung der Wachstumsgeschwindigkeit bzw. erzielten Endlänge der Koleoptile am stärksten hemmte. Weder höhere noch niedrigere Bodentemperaturen während der Bestrahlung hatten ein so gutes allgemeines Ergebnis.

Zunahme der Belichtung dauernd ab. Sehr eigenartig nimmt im Gegensatz dazu die Länge des 1. Internodiums, das unmittelbar an der Ansatzstelle von Koleoptile-Mesokotyl beginnt, mit Zunahme der Belichtungsdauer erst stark zu, bei noch längerer Belichtungsdauer wieder stark ab. (gemessen 7 Tage nach Beginn der Keimlingsentwicklung).

g. mit den Wellenlängen 5460 und 5780 Å. E. der Hg-Lampe bei einer Intensität von ca 75 Erg/cm²/sec 3—5 Std. lang belichtet (1. V. 29.)

Irgend ein deutlicher Einfluss dieser Belichtung auf die Mesokotyl-Entwicklung konnte nicht festgestellt werden.

h. mit den Wellenlängen 4360 und sehr wenig 4050 Å. E. der Hg-Lampe bei einer Intensität von ca 61 Erg/cm²/sec. 3 —12 Std. lang belichtet (30. IV. 29.)

Auch hierbei konnte kein besonderer Einfluss der Belichtung auf die Mesokotyl-Entwicklung bemerkt werden, sodass wir auf die Wiedergabe von Einzeldaten verzichten.

Das Gesamtergebnis dieser Versuche ist deshalb ganz interessant, weil es deutlich zeigt, dass in den ersten Stadien der Keimlingsentwicklung das phototropisch stark reizend wirkende Blau-Violett so gut wie gar keinen Einfluss auf das Wachstum des Mesokotyls auszuüben vermag. Gelb-Grün bleibt allerdings ebenso wirkungslos und es mag daher etwas merkwürdig erscheinen, dass das gleichzeitige Zusammenwirken dieser 4 Hauptwellenbezirke der Hg-Lampe, wie es bei der Weiss-Beleuchtung in Versuch *f* der Fall war, ganz andere Ergebnisse zeitigt. Ob das vielleicht an den zu kleinen Intensitäten liegt, mit denen in den Versuchen *g* und *h* bestrahlt worden ist, oder ob da noch andere Faktoren von Einfluss sind, müssen weitere Versuche lehren, die bereits in Ausführung begriffen sind. Jedenfalls wirken in einem bestimmten Stadium der Keimentwicklung Wärme und Licht gleichsinnig hemmend auf das Mesokotylwachstum ein, aber es ist noch eine ungelöste Frage, ob diese Einwirkung prinzipiell nach einem gleichen physiologischen Typus verläuft. Wir möchten das bezweifeln, nachdem wir beobachten konnten, dass einmal eine zu lang andauernde Wärmebestrahlung in ihrem spezifischen Einfluss auf das Wachstum des Mesokotyls wieder unwirksam wird, während andererseits eine längere Lichtbestrahlung sich sogar in dem Wachstum des 1. Internodiums bemerkbar macht, wo die Wärmebestrahlung wohl wirkungslos bleibt. Wir hoffen, im weiteren Verband unserer Studien diese Fragen noch genauer beantworten zu können.

Ad 2. Die vielen, in den letzten Jahren veröffentlichten Untersuchungen über das Wachstum der Koleoptile unter dem Einflusse des Lichtes zeigen deutlich, dass für eine befriedigende Erklärung dieser Wachstumserscheinungen nicht nur die Messung des Totalwachstums in den einzelnen Phasen eines Wachstumsvorganges notwendig ist, sondern dass man auch darüber unterrichtet sein muss, an welchen Stellen der Koleoptile dieses Wachstum besonders lokalisiert ist, oder wo es besonders

intensiv ist. Ohne eine sorgfältige Berücksichtigung dieser Momente ist es nicht möglich, sich ein klares Bild von dem Zusammenspiel der verschiedenen Faktoren zu machen, die z. B. als Endergebnis eine phototropische Krümmung vor Augen führen. Wenn man nun die verschiedenen Methoden überprüft, mit denen bisher Wachstum und Krümmungen bei der Koleoptile gemessen worden sind, so kommt man zu dem Schluss, dass nur die in bestimmter Art und Weise modifizierte *kinematographische Messmethode* geeignet ist, uns ein aufschlussreiches Bild über einen photischen Wachstumsvorgang zu geben. Wir betrachten es nicht als unsere Aufgabe, an diesem Orte die Vorzüge dieser Messmethode eingehender zu erörtern, sondern wollen nur kurz an der Hand von 2 Beispielen zeigen, was für Ergebnisse man mit der kinematographischen Aufnahme erzielen kann, wenn man sie in geeigneter Art und Weise zur Anwendung bringt.

Wir benutzen als Aufnahme-Apparat einen „Universal-Kinamo“, der mit einem Zeiss-Teletessar 1 : 6.3 ($f = 12$ cm) ausgestattet ist; angetrieben wird der Apparat von einem Klinostaten nach NUERNBERGK (E. NUERNBERGK 1929), der gleichzeitig die zur Aufnahme notwendige Beleuchtung einschaltet, und ausserdem eventuell die intermittierende Drehung der Versuchspflanzen bewerkstelligt. Als Beleuchtung fungiert eine 40 Watt Nitra-Lampe in der von BUDER (1926) angegebenen Kondensor-Projektionsanordnung, wobei zur Erzielung roten Lichtes ein Lifa-Dunkelkammerfilter für orthochromatische Platten verwendet wird. In den Stromkreis der Lampe ist ausserdem ein verstellbarer Widerstand von ca 800 Ohm (bei 220 Volt Lampenspannung) zwischengeschaltet, der während der Registrieraufnahmen voll zur Wirkung kommt und das Beleuchtungslicht stark abschwächt. So wird eine absolut einwandfreie Registrierbeleuchtung erzielt, die obendrein während jeder Aufnahme nur 15 Sek. lang brennt. Photographiert wird auf Perutz-Panchromatischen Film.

1 Std. vor Beginn des Versuches wird das Experimentierpflänzchen mit einer *Zonenmarkierung* versehen, wozu wir eine Mischung von Holzkohlepulver in geeigneter Korngrösse mit Paraffinum liquidum verwenden. Mit Hilfe eines Pinselchens oder Stäbchens können die einzelnen Kohlekörnchen leicht an beliebigen Stellen der Koleoptile festgeklebt werden, ohne dass irgendwie ein thigmotropischer Einfluss dieser Manipulation zu befürchten wäre. Wird alsdann ein so hergerichtetes Pflänzchen in geeigneter Weise zur Registrier-Beleuchtung orientiert, so sind nachher auf dem Filme deutlich die einzelnen markierten Zonen sichtbar, wie Fig. 2 a und b zeigt, 2 Positivbilder aus einem, von uns aufgenommenen Registrierfilm von einer ersten positiven phototropischen Krümmung.

Die nachfolgende Auswertung der Registrierfilme machen wir mit einem eigens dafür konstruierten kleinen Projektionsapparat¹⁾, der sich über

¹⁾ Diesen Apparat sowie überhaupt die ganze phototropische Versuchsanordnung, die wir bei unseren Studien gebrauchten, wird demnächst anderen Ortes von dem einen von uns genauer beschrieben werden.

einem grossen Tisch angebracht befindet, sodass die Filmbilder auf die Tischoberfläche vergrössert projiziert werden und dort bequem mittels Messrädchen etc. ausgemessen werden können. Wir können mit dieser Methode leicht eine 50-fache Vergrösserung der natürlichen Grösse erzielen;

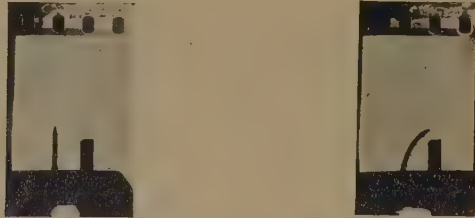


Fig. 2.

2 Filmbilder aus dem Registrierfilm einer positiven phototropischen Krümmung. (Vgl. Kurven. Fig. 3).

$a = 18 \text{ min.}$, $b = 178 \text{ min.}$ nach Beginn der Belichtung.

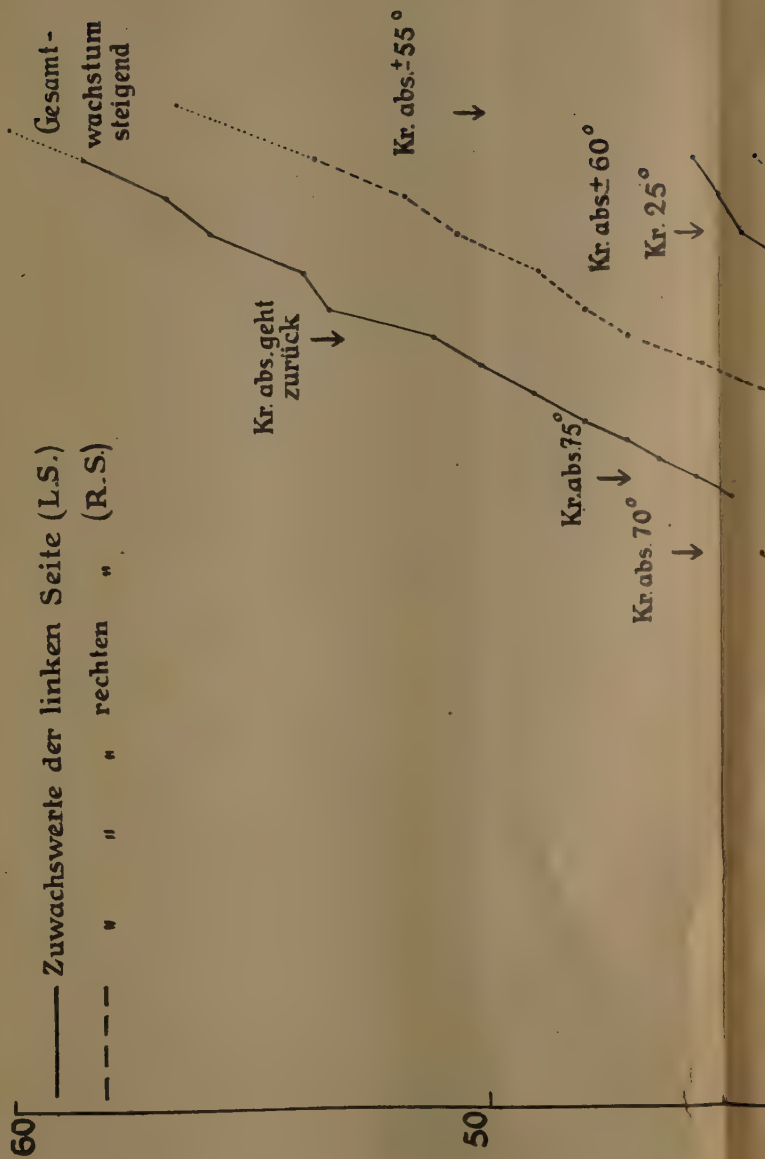
bei den gleich zur Besprechung kommenden 2 Versuchen war die Vergrösserung aber nur 28 fach. (Die Vergrösserung der reproduzierten beiden Kurven beträgt wegen der drucktechnisch notwendigen Verkleinerung nur $21 \times$.)

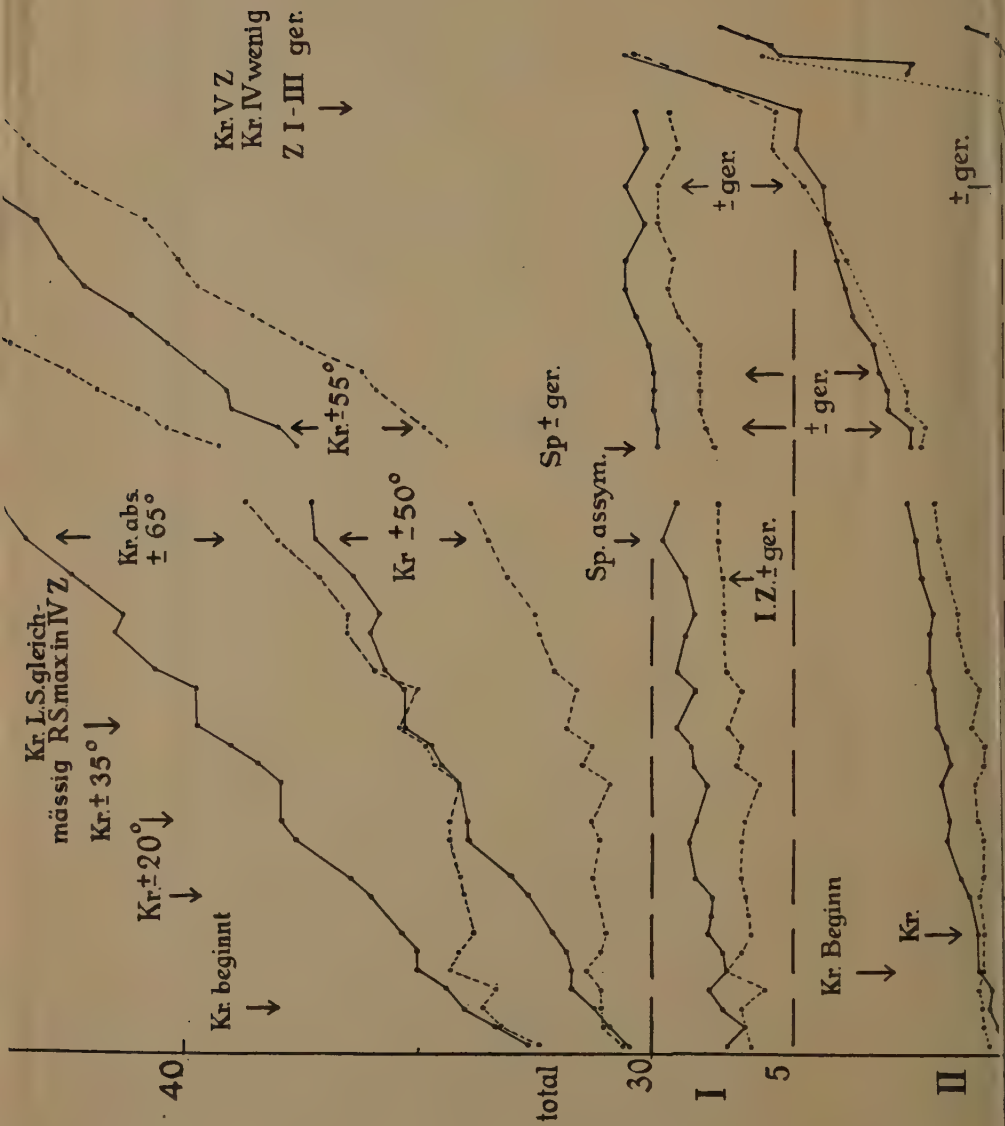
Als Beispiel für die Leistungsfähigkeit unserer Methode seien nun noch zum Schluss 2 Kurvendarstellungen einer ersten positiven phototropischen Krümmung (Fig. 3) und einer negativen Krümmung (Fig. 4) vorgeführt. In beiden Fällen kamen die Versuchspflänzchen nach der Belichtung auf den Intermittierenden Klinostaten, was schon deshalb nötig ist, weil eine einwandfreie negative Krümmung, wie schon ARISZ (1915) festgestellt hat, gewöhnlich nur mit Hilfe von Klinostatenrotation erzielt werden kann. Belichtet wurde schmal-seitlich total mit einer 60 Watt Philips-Arga-Lampe (= Osram-Nitra-Lampe, $\frac{1}{2}$ mattiert) in horizontal-achsialer Lampenlage. Temperatur während des Versuches war 22 Grad C. Es wurden vorgewärmte, mesokotylfreie Pflänzchen benutzt. Die Lichtintensitäten wählten wir nach den Tabellen von ARISZ aus, und zwar betrug sie bei der positiven Krümmung $2 \text{ Sec.} \times (95-100) \text{ MK}^1$), bei der negativen Krümmung $50 \text{ Sec.} \times (300-350) \text{ MK}^2$). Die Rotationsperiode war bei der positiven phototropischen Krümmung 8 Min., bei der negativen Krümmung 4 Min., bei einer Umdrehungsgeschwindigkeit von 1 Umdr./Min. Der Intermittierungswinkel betrug 180 Grad. Rotiert wurden die Pflanzen so, dass ihre Dorsiventralebene senkrecht und gleichzeitig parallel zur Richtung der Klinostatenachse lag. So standen die Pflänzchen während der einen Inter-

¹⁾ Die Intensität im sichtbaren Spektrum (Cu SO₄ Filter, 1 cm Stärke, 53 gaus 1e Wasser, + Schott Bg 9 Filter, 2 mm) betrug etwa $14.6 \text{ Erg/cm}^2/\text{sec.}$ (ca. 4.5 Erg für $\lambda = 400-509 \mu\mu$)

²⁾ Die Intensität betrug etwa $46 \text{ Erg/cm}^2/\text{sec.}$ (ca. 14 Erg für $\lambda = 400-509 \mu\mu$).

H. G. DU BUY UND ERICH NUERNBERGK: UEBER DAS WACHSTUM DER KOLEOPTILE UND DES MESO-KOTYLS VON AVENA SATIVA UNTER VERSCHIEDENEN AUSSENBEDINGUNGEN.





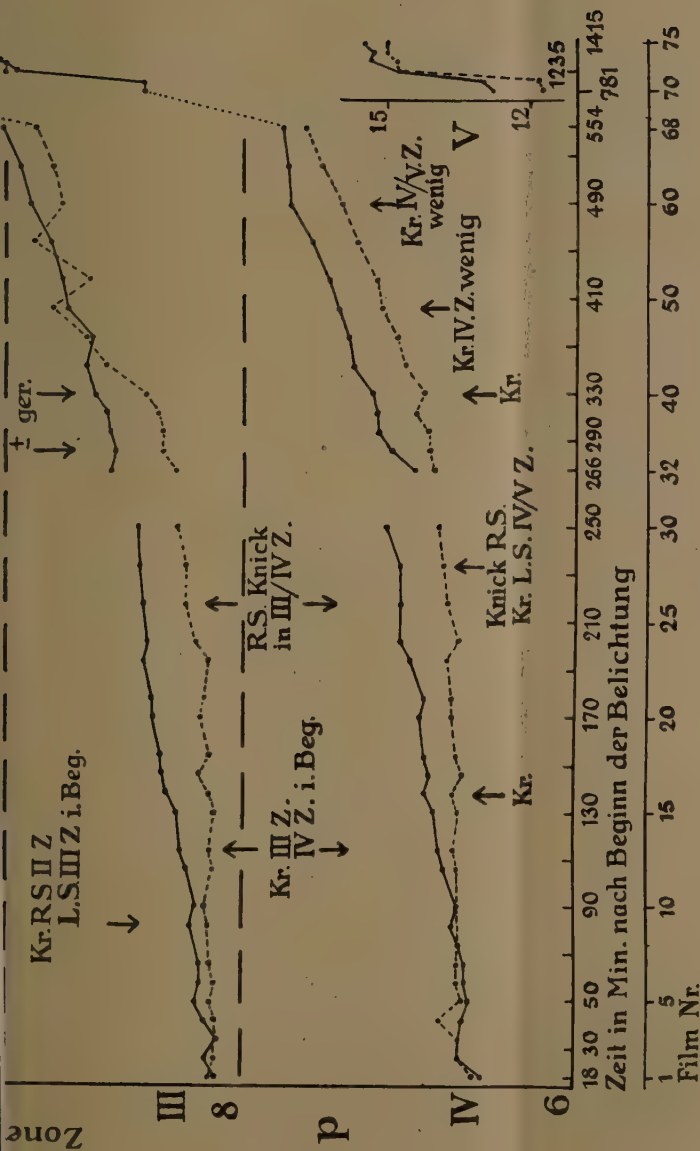
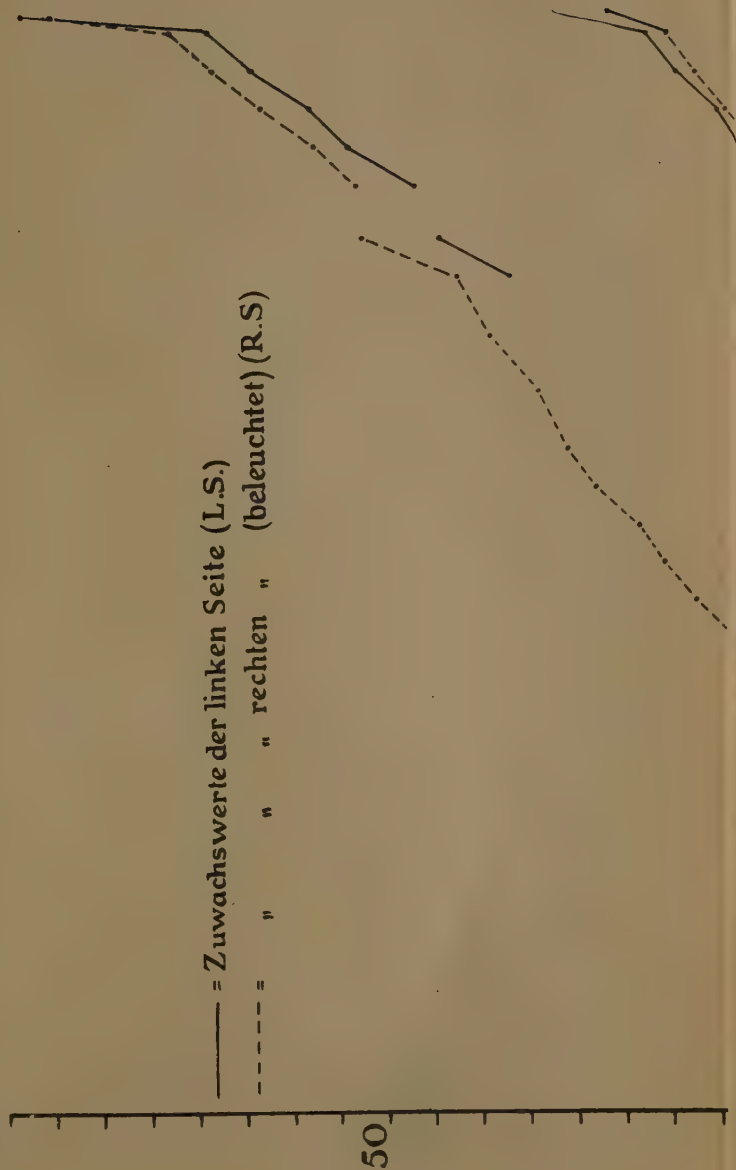
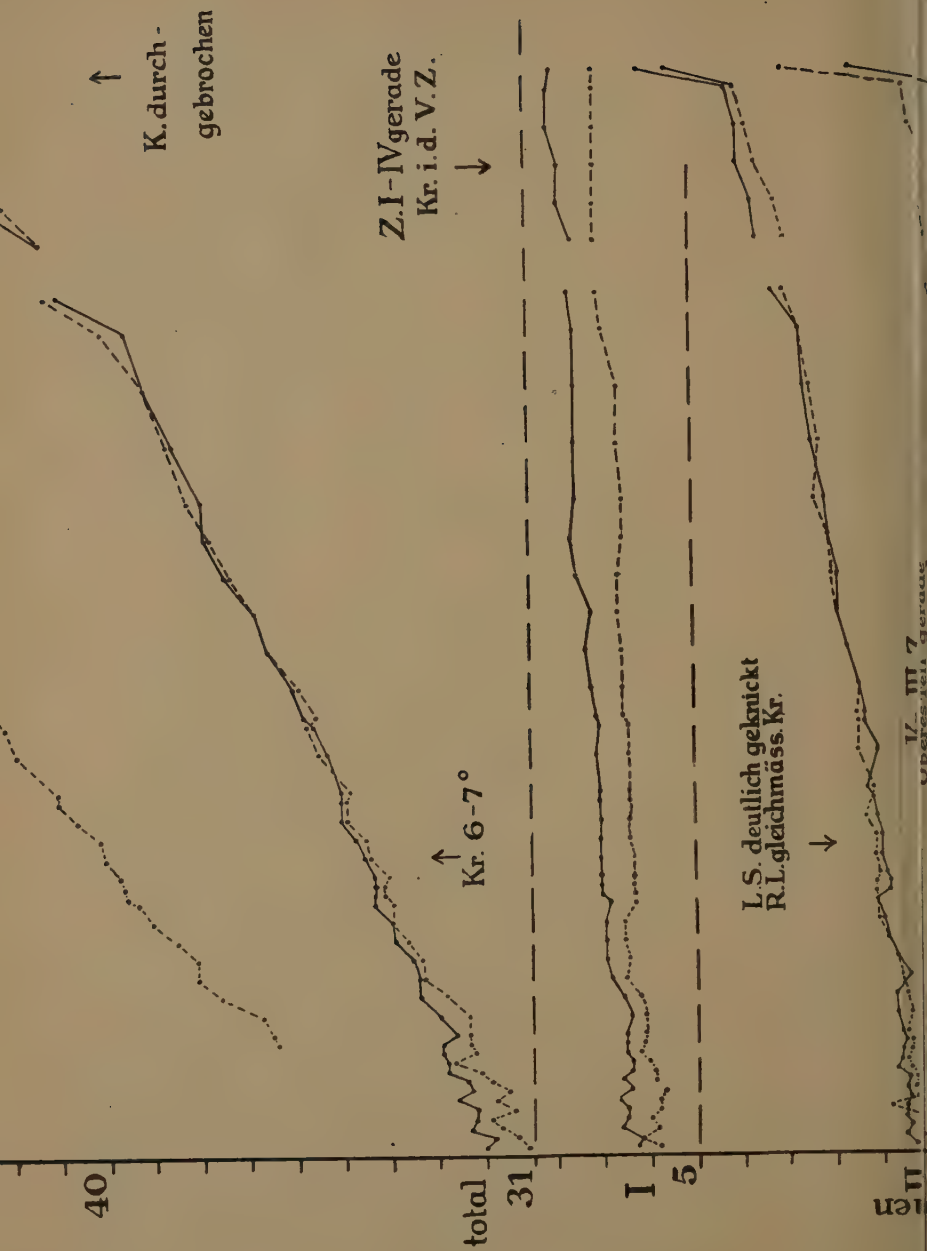


Fig. 3.

Erste positive phototropische Krümmung einer Avenakoleoptile nach einer Belichtung mit 2 Sec. \times (95—100) MK.
 Nach der Belichtung auf den intermittierenden Klinostaten. Masstab 21 : 1.
 Die rechte Seite ist beleuchtet worden.

H. G. DU BUY UND ERICH NUERNBERGK: UEBER DAS WACHSTUM DER KOLEOPTILE UND DES MESOKOTYLS VON
 AVENA SATIVA UNTER VERSCHIEDENEN AUSSENBEDINGUNGEN.





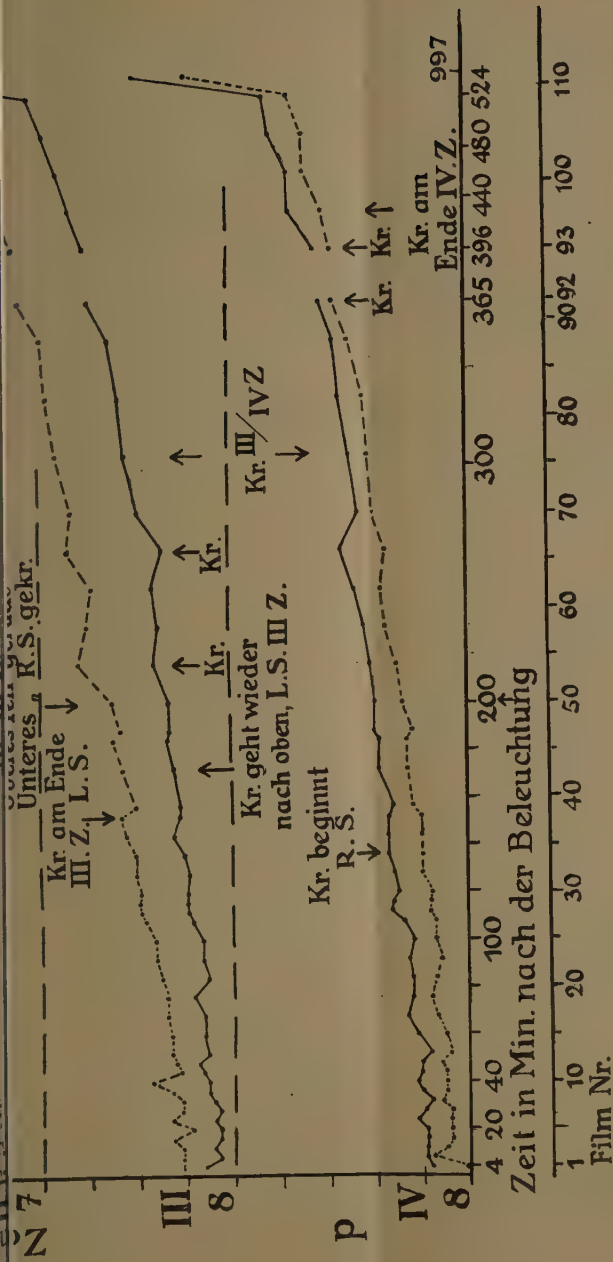


Fig. 4.

Negative phototropische Krümmung einer Avenakoleoptile nach einer Belichtung mit 50 Sec. \times (300—350 MK.
Nach der Belichtung auf den intermittierenden Klinostaten. Maßstab 21 : 1.

mittierung vertikal aufrecht, wobei sie auch photographiert wurden, während der die Schwerkraft kompensierenden Intermittierung aber auf dem Kopf.

Zu den beiden Kurvendarstellungen ist im einzelnen noch folgendes zu bemerken: Da, wo am Rande die Bezeichnung „total“ gegeben ist, sind 2 Kurvenpaare aufgetragen, von denen das oberste die Zuwachswerte, bzw. die Länge der gesamten Pflanze, vom Boden aus gerechnet, wiedergibt. Das darunter stehende Kurvenpaar stellt die Zuwachswerte bzw. das Gesamtwachstum der obersten 4 (5) Zonen, die bis zur untersten Zonen-Markierung sich erstrecken, dar.

Darunter folgen dann die 4 (5) Zonen mit ihren Zuwachswerten.

Wenn wir nun noch mit wenigen Worten die beiden Kurvendarstellungen beschreiben, so zeigt zunächst das Wachstum der einzelnen Zonen bei der *positiven phototropen Krümmung* eine sehr charakteristische Gestalt, indem die Wachstumskurven der linken und der *beleuchteten* rechten Seite zunächst auseinanderlaufen, um nachher wieder zusammen zu kommen. Das Kurvenpaar einer jeden Zone zeigt so gewissermassen das Abbild einer Bastfaser, sodass man sie beinahe als „Bastfaserkurven“ bezeichnen kann. Natürlich rührt diese Erscheinung, welche wir bei der negativen Krümmung nicht beobachten können, davon her, dass jede einzelne Zone zunächst ein Krümmungsstadium durchmacht, um nachher wieder gerade zu werden. Den letzten Zustand haben wir mit „ger.“ in der Darstellung angedeutet. Ferner kann man schön sehen, dass sich die 1. Zone, also die Spitzenzone, nicht an der Krümmung beteiligt, sondern nur die weiter darunter gelegenen Zonen, und dass der Eintritt der Krümmung durch ein (im Vergleich zur beleuchteten Seite) relativ stärkeres Wachstum der unbeleuchteten Seite zustande kommt, während die Wiedergeradestreckung ungekehrt durch ein verstärktes Wachstum der beleuchteten Seite bewirkt wird. Das Herunterlaufen der Krümmung von oben nach unten ist gleichfalls gut wahrzunehmen; zum Schlusse wird die Krümmung schliesslich in der Basis lokalisiert, und es ist ein ziemlich starkes Basiswachstum der noch jüngeren Koeoptile zu erkennen. Das Basiswachstum bewirkt auch, dass die beiden Kurvenpaare des „Totalwachstums“ am Ende weit auseinanderlaufen, die dabei angegebenen Krümmungswinkel, die mit „abs.“ bezeichnet sind, geben die vollständige Krümmung, vom Boden aus gerechnet, an, während die ohne besondere Angabe notierten Winkel die Krümmung der 4 (5) oberen Zonen bezeichnen.

Gegenüber den für die positive Krümmung charakteristischen Kurven zeigen die Kurven einer negativen Krümmung in Fig. 4 ein ganz anderes Bild, und man sieht ganz deutlich, dass die negative Krümmung nicht einfach die Reaktionsumkehr einer positiven Krümmung ist. Die Bastfaserkurven sind schon gar nicht vorhanden, ausserdem beteiligt sich die 2. Zone, die bei der positiven Krümmung noch eine gewisse Rolle spielt, fast nicht mehr an der Krümmung, die vielmehr nur von den unteren beiden

Zonen, in der Hauptsache von der 3. Zone ausgeführt wird. Eingeleitet wird die Krümmung zwar auch durch ein relativ erhöhtes Wachstum — in diesem Falle — der beleuchteten Seite, aber das Wiederzusammenlaufen der Kurven fehlt, denn im Gegensatz zu der positiven Krümmung, wo nachher beim Wiedergeradewerden die unbeleuchtete Seite ihr Wachstum etwas verlangsamt, während die beleuchtete das ihrige erhöht, verläuft hier der Vorgang anscheinend so, dass die beleuchtete Seite ihr relativ zur unbeleuchteten Seite erhöhtes Wachstum beibehält, während die unbeleuchtete Seite erst nach und nach durch Beschleunigung ihres Wachstums einen Zustand erreicht, wo sie ebenso schnell wie die beleuchtete Seite wächst¹⁾. Ist dieser Zustand vorhanden, so ist die betreffende Zone der Pflanze wieder einigermaßen gerade geworden. Gleichwie für die positive Krümmung, ist aber auch für die negative Krümmung typisch, dass schliesslich die Krümmung in der Basis lokalisiert wird, wie überhaupt die Basis bei dem ganzen Krümmungsvorgang anscheinend eine grössere Rolle spielt, als man bisher gewöhnlich angenommen hat.

Da unsere beiden vorggeführten Beispiele in wesentlichen nur die *Methodik* unserer Wachstumsmessungen demonstrieren sollen, so kann man von ihnen noch nicht verlangen, dass sie bereits eine Auflösung der bei den phototropischen Krümmungsprozessen vorhandenen Wachstumsvorgänge ergeben. Dafür sind vielmehr weitere und noch eingehendere Untersuchungen nötig, mit denen wir z. Z. beschäftigt sind, und über deren Ergebnis wir hoffentlich demnächst berichten können.

LITERATURVERZEICHNIS.

- ARISZ, W. H. (1915): Untersuchungen über den Phototropismus. Rec. trav. bot. néerl. 12, 44.
- BEYER, AD. (1927): Zur Keimungsphysiologie von *Avena sativa*. Ber. D. bot. Ges. 45, 179.
- (1928): Experimentelle Studien zur Blaauwschen Theorie II. Planta 5, 478.
- BUDER, J. (1926): Kinematographische Registrierung mit dunkelstem Rot und kurzer Belichtung. Ber. D. bot. Ges. 44, 47.
- NUERNBERGK, E. (1925): Beiträge zur Physiologie des Tagesschlafs der Pflanzen. Bot. Abh. H. 8 S. 22 u. a.
- (1929): Ein elektrischer intermittierender Klinostat usw. Ber. D. bot. Ges. 47, 44.
- SILBERSCHMIDT, K. (1928): Untersuchungen über die Abhängigkeit des pflanzlichen Wachstumsverlaufes usw. Bibliotheca botanica H. 97. Stuttgart.
- DE VRIES, M. (1917): Ueber die Ursache des Auswachsens des Hypokotyls bei Keimlingen von *Avena sativa*. Rec. trav. bot. néerl. 14, 109.
- WENT, F. W. (1928): Wuchsstoff und Wachstum. Rec. trav. bot. néerl. 25, 1.

Utrecht, Botanisch Laboratorium, im Mai 1929.

¹⁾ Bei der Betrachtung und dem Vergleich der einzelnen Kurven untereinander muss man beachten, dass der Zeitmassstab in beiden Figuren von der Unterbrechung der Kurven an aus drucktechnischen Gründen um $\frac{1}{2}$ verkürzt ist, wodurch die Verhältnisse etwas schwerer überschaubar werden.

Mathematics. — *Ueber den Komplex der kubischen Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drei gegebene Geraden je einmal treffen.* Von J. W. A. VAN KOL. (Communicated by Prof. HENDRIK DE VRIES).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

§ 1. Den Komplex der kubischen Raumkurven k^3 , welche durch zwei gegebene Punkte A_1 und A_2 gehen, eine gegebene Gerade a zweimal und drei gegebene Geraden a_1 , a_2 und a_3 je einmal treffen, bilden wir in folgender Weise auf den Punktraum ab. Es seien a'_1 , a'_2 und a'_3 drei beliebige Geraden. Wir beziehen die Punktreihe von a_i projektiv auf den Ebenenbüschel mit der Achse a'_i ($i = 1, 2, 3$). Als Bild einer Kurve k^3 , welche a_1 , a_2 und a_3 bzw. in P_1 , P_2 und P_3 trifft, betrachten wir den Schnittpunkt der diesen Punkten zugeordneten Ebenen. Diese Abbildung ist offenbar eineindeutig.

§ 2. a'_i sind *singuläre Geraden*. In einem beliebigen Punkt P'_i von a'_i werden die ∞^1 Kurven k^3 , welche durch die den Ebenen $P'_i a'_k$ und $P'_i a'_l$ zugeordneten Punkten von a_k und a_l gehen, abgebildet. Die ∞^2 Kurven k^3 , welche auf a'_i abgebildet werden, treffen a_k und a_l in entsprechenden Punkten einer projektiven Verwandtschaft V_i .

Zum Komplex gehören ∞^2 kubische Plankurven, welche in den durch die Gerade $A_1 A_2$ gehenden Ebenen liegen. Die Ebenen durch $A_1 A_2$ erzeugen auf a_1 , a_2 und a_3 drei projektive Punktfolgen, denen drei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen a'_1 , a'_2 und a'_3 zugeordnet sind. Das System der ∞^2 kubischen Plankurven wird demnach auf eine kubische Raumkurve k_1^3 , welche a'_i zu Doppelsekanten hat, abgebildet. In einen beliebigen Punkt dieser *singulären Kurve* k_1^3 wird ein Büschel von kubischen Plankurven abgebildet.

Jeder Kegelschnitt, der a zweimal und a_1 , a_2 , a_3 und $A_1 A_2$ je einmal trifft, wird durch $A_1 A_2$ zu einer ausgearteten Kurve k^3 ergänzt. Dieses System von ∞^2 Ausartungen wird ebenfalls auf eine kubische Raumkurve k_2^3 , welche a'_i zu Doppelsekanten hat, abgebildet. Das System, das in einen beliebigen Punkt dieser *singulären Kurve* k_2^3 abgebildet wird, besteht aus $A_1 A_2$ und einem Büschel von Kegelschnitten.

Die Geraden, welche durch A_μ gehen und a_i treffen, werden durch die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\mu a$ liegen, durch A_μ gehen und a_k , a_l und eine solche Gerade treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab auf eine *singuläre Gerade* $s_{\mu i}$, welche

a'_k und a'_l trifft. Es gibt offenbar sechs solche *singuläre Geraden*. Das System, das in einen beliebigen Punkt einer solchen singulären Gerade abgebildet wird, besteht aus einer Gerade und einem Büschel von Kegelschnitten.

Die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\mu a$ liegen, durch A_μ gehen und a_1, a_2 und a_3 treffen, werden durch die Geraden, welche durch A_ν gehen und einen solchen Kegelschnitt treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab in einen *Hauptpunkt* H_μ . Der *Hauptpunkt* H_1 ist der Treffpunkt der drei singulären Geraden s_{2i} und der Hauptpunkt H_2 ist der Treffpunkt der drei singulären Geraden s_{1i} , während beide *Hauptpunkte* auf der singulären Kurve k_2^3 liegen.

Die zwei Transversalen t' und t'' von a, a_1, a_2 und a_3 werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a und t' bzw. t'' treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Die Bilder H' und H'' dieser zwei Systeme sind *Hauptpunkte*, welche ebenfalls auf k_2^3 liegen.

Die durch A_ν gehende Transversale von a_k und a_l wird durch die Kegelschnitte, welche in der Ebene $A_\nu a$ liegen, durch A_ν gehen und a_i und die eben genannte Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt, welche sich abbilden in einen Hauptpunkt $H_{\mu i}$. Es gibt *sechs* derartige *Hauptpunkte*, welche aber nicht auf singulären Kurven oder Geraden liegen.

Schließlich gibt es vier Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_1, a_2 und a_3 treffen. Jeder dieser Kegelschnitte wird durch die Geraden, welche ihn und a treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Wir finden also noch *vier Hauptpunkte* H'_ρ ($\rho = 1, \dots, 4$), welche auf k_1^3 liegen.

§ 3. Die Transversalen von a'_1, a'_2 und a'_3 bestimmen drei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen a'_1, a'_2 und a'_3 , denen drei projektive Punktreihen auf a_1, a_2 und a_3 entsprechen. Jede Kurve k^3 , welche a_1, a_2 und a_3 in entsprechenden Punkten dieser Punktreihen trifft, hat ∞^1 Bilder nämlich alle Punkte einer Transversale von a'_1, a'_2 und a'_3 ; jede derartige Kurve k^3 ist also eine *singuläre Kurve*.

Mit Hilfe des Satzes, dass die Kurven k^3 , welche a_1 in einem gegebenen Punkt P_1 und a_2 in einem gegebenen Punkt P_2 treffen, eine Fläche vierter Ordnung bilden, welche Doppelpunkte in A_2, A_2, P_1 und P_2 hat und auf welcher a eine Doppelgerade und a_3 eine einfache Gerade ist, lässt es sich zeigen, dass die singulären Kurven unseres Komplexes eine Fläche zwölfter Ordnung bilden, welche sechsfache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine sechsfache Gerade und a_1, a_2 und a_3 einfache Geraden sind.

§ 4. Ausser den oben schon erwähnten können wir noch die folgenden Systeme von ausgearteten Kurven k^3 angeben.

Die durch A_μ gehende Transversale von a und a_i wird durch die

Kegelschnitte, welche durch A_ν gehen und a, a_k, a_l und die eben genannte Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System bildet sich ab auf eine Ebene $\sigma_{\mu,i}$, welche die drei singulären Geraden $a'_i, s_{\nu k}$ und $s_{\nu l}$ und die zwei Hauptpunkte H_ν und $H_{\nu i}$ enthält.

Die Geraden, welche durch A_μ gehen und a treffen, werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_ν gehen und eine solche Gerade, a, a_1, a_2 und a_3 treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine kubische Fläche O_μ^3 abgebildet, welche die singulären Geraden a'_i , die singuläre Kurve k_1^3 und die zehn Hauptpunkte $H_\nu, H', H'', H_{\nu i}$ und H'_ρ enthält.

Die Transversalen von a, a_k und a_l werden durch die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_i und eine solche Transversale treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine Fläche O_i^2 zweiter Ordnung abgebildet, welche die vier singulären Geraden a'_k, a'_l, s_{1i} und s_{2i} , die singuläre Kurve k_2^3 und die zehn Hauptpunkte H_1, H_2, H' und H'' enthält.

Die Kegelschnitte, welche durch A_1 und A_2 gehen und a, a_k und a_l treffen, werden durch die Geraden, welche a, a_i und einen solchen Kegelschnitt treffen, zu ∞^2 ausgearteten Kurven k^3 ergänzt. Dieses System wird auf eine Fläche O'_i^2 zweiter Ordnung abgebildet, welche die zwei singulären Geraden a'_k und a'_l , die singuläre Kurve k_1^3 und die sechs Hauptpunkte H_{1i}, H_{2i} und H'_ρ enthält.

§ 5. Es sei k_p die Bildkurve des Systems Σ_1 der ∞^1 Kurven k^3 , welche durch einen gegebenen Punkt P gehen. Es gibt vier Kurven von Σ_1 , welche durch einen gegebenen Punkt von a_i gehen und somit acht Kurven von Σ_1 , welche a_k und a_l in einander in der Projektivität V_i zugeordneten Punkten treffen. Hieraus erhellt, dass eine durch a'_i gelegte Ebene mit k_p ausser a'_i vier Punkte gemein hat und dass a'_i mit k_p acht Punkte gemein hat. k_p ist also eine Kurve zwölfter Ordnung, welche die Geraden a'_i je in acht Punkten trifft. Ferner lässt es sich zeigen, dass k_p die Kurven k_1^3 und k_2^3 ausser Hauptpunkten je in einem Punkt trifft und dass k_p einfache Punkte in H_μ, H', H'' und H'_ρ hat.

§ 6. Analog beweist man:

Das System der ∞^1 Kurven k^3 , welche eine gegebene Doppelsekante b haben, wird abgebildet auf eine Kurve k_b zwölfter Ordnung, welche a'_i in 8 und $S_{\mu i}$ (ausser H_μ) in einem Punkt trifft und einfache Punkte in H_μ hat.

§ 7. Betrachten wir das System Σ_2 der ∞^2 Kurven k^3 , welche eine gegebene Gerade l treffen und seine Bildfläche O_l . Es gibt vier Kurven von Σ_2 , welche durch einen gegebenen Punkt von a_i und einen gegebenen Punkt von a_k gehen. Hieraus folgt, dass a'_i vierfache Geraden auf O_l sind und dass eine Transversale von a'_i und a'_k mit O_l ausser a'_i und a'_k vier Punkte gemein hat. O_l ist somit eine Fläche zwölfter

Ordnung, auf welcher k_1^3 und k_2^3 einfache Kurven und $s_{\mu i}$ einfache Geraden sind. In § 8 wird es sich zeigen, dass O_i dreifache Punkte in H_{μ} , Doppelpunkte in H' , H'' und H'_ρ und einfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat.

k_p und k_b treffen O_i ausser singulären und Hauptpunkten in 28 bzw. 36 Punkten. Hieraus ergibt sich:

Es gibt 28 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen.

Es gibt 36 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, zwei gegebene Geraden je zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen.

§ 8. Zwei Flächen O_i und O_m haben ausser a'_i , k_1^3 , k_2^3 und $s_{\mu i}$ eine Kurve k_{im} 84. Ordnung gemein, welche offenbar die Bildkurve des Systems der ∞^1 Kurven k^3 ist, welche zwei gegebene Geraden l und m treffen. Aus einer oben abgeleiteten Anzahl folgt, dass eine durch a'_i gelegte Ebene k_{im} ausser a'_i in 28 Punkten trifft. k_{im} trifft demnach a'_i je in 56 Punkten.

Die Anzahl der Treffpunkte von k_{im} und k^3 , somit die Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1 , a_2 , a_3 , l und m treffen, bestimmen wir in folgender Weise.

Es sei F die Fläche gebildet von den kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1 , a_2 , a_3 und l treffen. Zur Bestimmung der Ordnung von F legen wir eine beliebige Ebene α durch die Gerade $A_1 A_2$. α hat mit F eine kubische Plankurve und die Gerade $A_1 A_2$ gemein. Die Vielfachheit von $A_1 A_2$ auf F ist gleich der Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1 , A_2 und einen dritten Punkt A_3 von $A_1 A_2$ gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1 , a_2 , a_3 und l treffen. Es sei F' die Fläche gebildet von den kubischen Plankurven, welche durch A_1 , A_2 und A_3 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben und a_1 , a_2 und a_3 treffen. α hat mit F' wieder eine kubische Plankurve und die Gerade $A_1 A_2$ gemein. Nun wird die Gerade $A_1 A_2$ zu kubischen Plankurven ergänzt durch die Transversalen t'_i und t''_i von $A_1 A_2$, a , a_k und a_l und die durch den Punkt $a t'_i$ oder $a t''_i$ gehende Transversale von $A_1 A_2$ und a_i . Die Gerade $A_1 A_2$ ist also eine sechsfache Gerade auf der Fläche F' , welche somit von der neunten Ordnung ist. Hieraus erhellt wieder, dass $A_1 A_2$ eine neunfache Gerade auf F und F also eine Fläche zwölfter Ordnung ist. Demnach haben k_{im} und k_1^3 ausser Hauptpunkten zwölf Punkte gemein.

k_{im} und k_2^3 haben ausser Hauptpunkten acht Punkte gemein, weil es acht Kegelschnitte gibt, welche sechs gegebene Geraden treffen und deren Ebene durch zwei gegebene Punkte geht¹⁾.

¹⁾ Siehe: SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 95, wo die Kegelschnittzahl $\mu_2^6 = 8$ abgeleitet ist.

Es lässt sich ferner einfach beweisen, dass k_{lm} $s_{\mu i}$ ausser H_{μ} je in vier Punkten trifft und fünffache Punkte in H_{μ} , dreifache Punkte in H' , H'' und H'_{ρ} und einfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass der totale Schnitt von O_i und O_m neunfache Punkte in H_{μ} , vierfache Punkte in H' , H'' und H'_{ρ} und einfache Punkte in $H_{\mu i}$ hat. Demnach hat O_i dreifache Punkte in H_{μ} , Doppelpunkte in H' , H'' und H'_{ρ} und einfache Punkte in $H_{\mu i}$.

k_{lm} trifft O_n ausser singulären und Hauptpunkten in 220 Punkten.

Es gibt 220 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und sechs gegebene Geraden je einmal treffen.

§ 9. Es sei O_{γ} die Bildfläche des Systems Σ_3 der ∞^2 Kurven k^3 , welche eine gegebene Ebene φ berühren. Es gibt acht Kurven von Σ_3 , welche durch einen gegebenen Punkt von a_i und einen gegebenen Punkt von a_k gehen¹⁾. O_{γ} ist also eine Fläche 24. Ordnung, auf welcher a'_i achtfache Geraden sind. In jeder Ebene durch A_1 A_2 gibt es vier kubische Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppelpunkt auf a haben, a_1 , a_2 und a_3 treffen und φ berühren²⁾. k_1^3 ist somit eine vierfache Kurve auf O_{γ} . Ferner ist k_2^3 eine Doppelkurve und sind $s_{\mu i}$ Doppelgeraden auf O_{γ} . In § 10 wird es sich zeigen, dass O_{γ} sechsfache Punkte in H_{μ} , vierfache Punkte in H' , H'' und H'_{ρ} und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ hat.

k_p , k_b und k_{lm} treffen O_{γ} ausser singulären und Hauptpunkten bzw. in 54, 72 und 416 Punkten.

Es gibt 54 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drei gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

Es gibt 72 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, zwei gegebene Geraden je zweimal und zwei gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

Es gibt 416 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und fünf gegebene Geraden je einmal treffen und eine gegebene Ebene berühren.

§ 10. Zwei Flächen O_i und O_{γ} haben ausser a'_i , k_1^3 , k_2^3 und $s_{\mu i}$ eine Kurve $k_{l\gamma}$ 162. Ordnung gemein, welche die Bildkurve ist des Systems Σ_4 der Kurven k^3 , welche eine gegebene Gerade l treffen und eine gegebene Ebene φ berühren. Aus einer in § 9 berechneten Anzahl folgt, dass eine durch a_i gelegte Ebene $k_{l\gamma}$ ausser a'_i in 54 Punkten trifft. $k_{l\gamma}$ trifft demnach a'_i je in 108 Punkten.

Die Anzahl der Treffpunkte von $k_{l\gamma}$ und k_1^3 ist gleich der Anzahl der kubischen Plankurven, welche durch A_1 und A_2 gehen, ihren Doppel-

1) SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 182.

2) SCHUBERT, S. 160.

punkt auf a haben, a_1, a_2, a_3 und l treffen und φ berühren. Zur Bestimmung dieser Anzahl wenden wir eine SCHUBERT'sche Formel an, welche sich in unserm Fall vereinfacht zu:

$$2\nu - \frac{1}{2}\varrho - 3\mu = b \quad ^1).$$

Hierin bedeutet ν die Bedingung, dass die kubische Plankurve eine gegebene Gerade treffen soll, ϱ die Bedingung dass sie eine gegebene Ebene berühren soll, μ die Bedingung, dass ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll und b die Bedingung, dass sie einen Doppelpunkt auf einer gegebenen Ebene haben soll. Bezeichnen wir noch mit P die Bedingung, dass die kubische Plankurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so ist:

$$2 \cdot P^2 b^2 \nu^5 - \frac{1}{2} \cdot P^2 b^2 \nu^4 \varrho - 3 \cdot P^2 b^2 \mu \nu^4 = P^2 b^3 \nu^4.$$

In § 8 haben wir gefunden: $P^2 b^2 \nu^5 = 12$, während $P^2 b^2 \mu \nu^4 = P^2 b^3 \nu^4 = 1$. Es ergibt sich: $P^2 b^2 \nu^4 \varrho = 40$ ²⁾. $k_{l\varphi}$ und k_1^3 haben also ausser Hauptpunkte 40 Punkte gemein.

k_2^3 trifft $k_{l\varphi}$ ausser Hauptpunkten in einem Doppelpunkt, welcher das Bild ist der doppelt gerechneten Kurve k^3 von Σ^4 gebildet von der Gerade $A_1 A_2$ und dem Kegelschnitt, der durch den Punkt $(A_1 A_2) \varphi$ geht und a zweimal und a_1, a_2, a_3 und l je einmal trifft, und in vierzehn einfachen Punkten, welche die Bilder sind der Kurven k^3 von Σ_4 gebildet von der Gerade $A_1 A_2$ und den vierzehn Kegelschnitten, welche a zweimal und a_1, a_2, a_3, l und $A_1 A_2$ je einmal treffen und φ berühren.

Es lässt sich ferner beweisen, dass die Geraden $s_{\mu i}$ je $k_{l\varphi}$ in zwei Doppelpunkten und vier einfachen Punkten treffen und dass $k_{l\varphi}$ zehnfache Punkte in H_{μ} , sechsfache Punkte in H' und H'' , Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ und vierfache Punkte in H'_{ρ} hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt wieder, dass der totale Schnitt von O_l und O_{φ} 18-fache Punkte in H_{μ} , 8-fache Punkte in H', H'' und H'_{ρ} und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$ hat. O_{φ} hat also sechsfache Punkte in H_{μ} , vierfache Punkte in H', H'' und H'_{ρ} und Doppelpunkte in $H_{\mu i}$.

$k_{l\varphi}$ trifft O_{φ} ausser singulären und Hauptpunkten in 752 Punkten.

Es gibt 752 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und vier gegebene Geraden je einmal treffen und zwei gegebene Ebenen berühren.

§ 11. Analog beweist man:

Das System der ∞^1 Kurven k^3 , welche zwei gegebene Ebenen φ und

¹⁾ SCHUBERT, S. 152.

²⁾ Diese Anzahl lässt sich auch auf derselben Weise wie $P^2 b^2 \nu^5$ bestimmen (§ 8). Herrn Dr. G. SCHAAKE verdanke ich die folgende Bemerkung. Die Fläche F hat mit der Ebene φ eine Kurve k^{12} zwölfter Ordnung gemein, welche einen neunfachen Punkt in $(A_1 A_2) \varphi$ und einen Doppelpunkt in $a \varphi$ hat. Durch den Punkt $(A_1 A_2) \varphi$ gehen $12 \cdot 11 - 10 \cdot 9 - 2 = 40$ Tangenten, welche k^{12} ausser diesem Punkt berühren. Hieraus folgt unmittelbar $P^2 B^2 \nu^4 \varrho = 40$.

³⁾ SCHUBERT, S. 95.

ψ berühren, wird abgebildet auf eine Kurve $k_{\psi\psi}$ 300. Ordnung, welche von a'_i in 200 Punkten, von k_1^3 in 128 Punkten, von k_2^3 in 24 einfachen und vier Doppelpunkten und von $s_{\psi i}$ in 8 einfachen und vier Doppelpunkten getroffen wird und 20-fache Punkte in H_{ψ} , 12-fache Punkte in H' und H'' und vierfache Punkte in $H_{\psi i}$ hat, aber nicht durch H'_2 geht.

Das $k_{\psi\psi}$ und a'_i 200 Treffpunkte haben, folgt jetzt nicht aus einer oben abgeleiteten Anzahl. Man kann aber leicht beweisen, dass die Anzahl der Treffpunkte von $k_{\psi\psi}$ und a'_i gleich zwei drittel der Ordnung von $k_{\psi\psi}$ ist ¹⁾.

$k_{\psi\psi}$ trifft O_{ψ} ausser singulären und Hauptpunkten in 1248 Punkten.

Es gibt 1248 kubische Raumkurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und drei gegebene Geraden je einmal treffen und drei gegebene Ebenen berühren.

Eine durch a'_i gelegte Ebene trifft $k_{\psi\psi}$ ausser a'_i in 100 Punkten.

Es gibt 100 kubische Raumkurven, welche durch drei gegebene Punkte gehen, eine gegebene Gerade zweimal und zwei gegebene Geraden je einmal treffen und zwei gegebene Ebenen berühren.

§ 12. Die folgende Tabelle enthält die Anzahlen, welche oben berechnet sind oder sich mit Hilfe der Abbildungen von einigen anderen Systemen von Kurven k^3 berechnen lassen.

$P^3 B \nu^4 = 28$	$P^2 B^4 = 1$	$P^2 B^3 \nu^2 = 6$	$P^2 B^2 \nu^4 = 36$
$P^3 B \nu^3 \varrho = 54$		$P^2 B^3 \nu \varrho = 12$	$P^2 B^2 \nu^3 \varrho = 72$
$P^3 B \nu^2 \varrho^2 = 100$			$P^2 B^2 \nu^2 \varrho^2 = 144$
$P^2 B \nu^6 = 220$			
$P^2 B \nu^5 \varrho = 416$			
$P^2 B \nu^4 \varrho^2 = 752$			
$P^2 B \nu^3 \varrho^3 = 1248$			

Hierin bedeutet P die Bedingung, dass die kubische Raumkurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll, B die Bedingung dass sie eine gegebene Doppelsekante haben soll, ν die Bedingung dass sie eine gegebene Gerade treffen soll und ϱ die Bedingung dass sie eine gegebene Ebene berühren soll.

§ 13. Schliesslich geben wir einige Eigenschaften von Flächen gebildet von Systemen von ∞^1 Kurven $k^{3,2}$.

Die Kurven k^3 , welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, bilden eine Fläche F_P 28. Ordnung, welche 14-fache Punkte in A_1 , A_2 und P hat und auf welcher a eine 13-fache Gerade und a_i 4-fache Geraden sind.

Die Kurven k^3 , welche zwei gegebene Geraden l und m treffen, bilden eine Fläche F_{lm} 220. Ordnung, welche 108-fache Punkte in A_1 und A_2

¹⁾ Eine derartige Bemerkung gilt auch für die Kurven k_{lm} und k_{lp} .

²⁾ Siehe auch diese Proceedings, 30, S. 1015—1016.

hat und auf welcher a eine 92-fache Gerade und a_i , l und m 28-fache Geraden sind.

Die Kurven k^3 , welche eine gegebene Gerade l treffen und eine gegebene Ebene φ berühren, bilden eine Fläche $F_{l\varphi}$ 416. Ordnung, welche 196-fache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine 180-fache Gerade und a_i und l 54-fache Geraden sind. Weil eine durch l gelegte Ebene φ mit F_{lm} ausser l eine Kurve 192. Ordnung gemein hat und es 36 Kurven k^3 gibt, welche l zweimal und m einmal treffen, ist die Berührungskurve von $F_{l\varphi}$ mit φ von der Ordnung $192 - 2 \cdot 36 = 120$.

Die Kurven k^3 , welche zwei gegebene Ebenen φ und ψ berühren, bilden eine Fläche $F_{\varphi\psi}$ 752. Ordnung, welche 328-fache Punkte in A_1 und A_2 hat und auf welcher a eine 344-fache Gerade und a_i 100-fache Geraden sind. Weil eine durch l gelegte Ebene mit $F_{l\varphi}$ ausser l eine Kurve 362. Ordnung gemein hat und es 72 Kurven k^3 gibt, welche l zweimal treffen und φ berühren, sind die Berührungskurven von $F_{\varphi\psi}$ mit φ und ψ von der Ordnung $372 - 2 \cdot 72 = 218$.

Wir bemerken noch, dass die Vielfachheiten von A_1 , A_2 und a sich berechnen lassen vermittelst der Abbildungen der Systeme der Kurven k^3 , welche eine durch A_x gelegte Gerade noch ausser A treffen oder eine Gerade, welche a trifft, noch ausser diesem Treffpunkt treffen. Aus oben angegebenen Eigenschaften der Bildkurven k_p , k_{lm} , $k_{l\varphi}$ und $k_{\varphi\psi}$ lassen sich viele Eigenschaften folgern, welche sich beziehen auf die ausgearteten Kurven k^3 , welche auf den Flächen F_p , F_{lm} , $F_{l\varphi}$ und $F_{\varphi\psi}$ liegen.

Mathematics. — *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel.* By M. EUWE. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

§ 1. *Unseren Betrachtungen liegt die BROUWERSche Mengendefinition* ¹⁾ *zu Grunde:*

“Eine Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes $n > 1$ nach jeder unbeeendigten und ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n -te Nummer gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist), heisst ein Element der Menge. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir kurz ebenfalls als die Menge M bezeichnen.”

Wir definieren:

a. $S_1, S_2 \dots S_m$, alle nach den Spielregeln möglichen Stellungen auf dem Schachbrett, in willkürlicher aber festgehaltener Reihenfolge nummeriert; dabei werden zwei Stellungen mit gleichem Figurenstand als verschieden gerechnet, wenn nicht dieselbe Partei am Zuge ist.

$$\left(m < \frac{2 \cdot (495)^2 \cdot 16 \cdot 64!}{(3!)^{12} \cdot 32!} \right). S_1 \text{ ist die Anfangstellung.}$$

b. Die Relation $S_p \rightarrow S_q$ besteht, wenn die Schachregeln den Übergang in einem Zuge von S_p auf S_q erlauben, wenn also S_q von S_p aus in einem Zuge erreichbar ist.

c. Die Wahlfreiheit i . Zu einer bestimmten S_p , gibt es eine endliche Zahl $i \geq 0$ von Stellungen S_{p_v} , wofür $S_p \rightarrow S_{p_v}$ ($v = 1 \dots i$; $i < 150$).

Die Stellungen, wofür $i = 0$, nennen wir wahllos (patt oder matt).

d. Das Gesetz, welches die Menge S der Schachpartien definiert:

Die erste Wahl einer willkürlichen Nummer erzeugt immer S_1 , die Anfangstellung.

Wählt man bei der zweiten Wahl die natürliche Zahl p , so wird bei

¹⁾ L. E. J. BROUWER: Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I, Math. Ann. 93 (1923) p. 244.

$p \leq$ Wahlfreiheit von S_1 , die p -te der von S_1 aus erreichbaren Stellungen erzeugt, wobei diese letzteren der Grösse ihrer Indicen nach geordnet sind. Ist $p >$ Wahlfreiheit von S_1 , so wird nichts erzeugt. Im allgemeinen, wenn man bei der n -ten Wahl die natürliche Zahl p wählt, so wird bei $p \leq$ Wahlfreiheit der zuletzt von der $(n-1)$ ten Zahl erzeugten Stellung S_α , die p -te der von dieser S_α aus erreichbaren Stellungen erzeugt, wobei diese letzteren der Grösse ihrer Indicen nach geordnet sind. Ist $p >$ Wahlfreiheit von S (z. B. wenn diese Wahlfreiheit $= 0$) so wird nichts erzeugt ¹⁾.

Auf diese Weise entsteht ein Verzweigungsagglomerat, wobei von jeder Stellung eine Anzahl Zweige ausgehen, gleich ihrer Wahlfreiheit i . Die wahllosen Stellungen bilden die Endpunkte, von denen aus keine Fortschreitung des Prozesses mehr stattfindet.

Die Menge S besitzt eine Teilmenge E der endlichen Schachpartien. Ihre konstruktive Definition lautet wie bei S , nur mit der Hinzufügung, dass die Erzeugung einer S_α , die in keinerlei Art zu einer wahllosen Stellung führen kann, zur Hemmung des Prozesses und Vernichtung seines Resultates Veranlassung gibt. Wir nennen diese Eigenschaft der S_α P_1 und werden in § 3 beweisen, dass sich für jede Stellung entscheiden lässt, ob sie diese Eigenschaft P_1 besitzt oder nicht.

Die Teilmenge U der unendlichen Schachpartien hat ebenso dasselbe Erzeugungsgesetz wie S , jedoch mit der Hinzufügung: die Erzeugung einer wahllosen Stellung oder einer Stellung, welche unbedingt zu einer wahllosen führt, ergibt Hemmung und Vernichtung. Diese Eigenschaft, unbedingt zu einer wahllosen Stellung führen zu müssen, nennen wir P_2 und wir werden in § 3 beweisen, dass jede Stellung entweder P_2 oder non- P_2 besitzt.

§ 2. Die Mächtigkeiten der Mengen S , E und U .

$E \prec A^2$) (A ist die Menge der natürlichen Zahlen).

¹⁾ Laut dieser Definition werden die endlichen Schachpartien, die nicht mit patt oder matt enden, ausgeschaltet. Der Einfluss der Remisregeln (50-Züge Regel, englische und deutsche Regel) wird in § 4 untersucht.

²⁾ Man beachte den Unterschied in der intuitionistischen Mengelehre zwischen Äquivalenz (\equiv) und Gleichmächtigkeit (\prec):

Wenn zwischen zwei Mengen M und N eine eindeutige Beziehung hergestellt werden kann, d.h. ein Gesetz, welches jedem Elemente von M ein Element von N zuordnet in solcher Weise, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und jedes Element von N einem Elemente von M zugeordnet wird, so schreiben wir $M \prec N$, und sagen, dass M und N dieselbe Mächtigkeit oder Kardinalzahl besitzen, oder gleichmächtig sind.

Zwei Mengen M und N heissen äquivalent, wenn durch ein Gesetz G_1 jedem Element von M ein solches Element von N zugeordnet ist, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und durch ein Gesetz G_2 jedem Element von N ein solches Element von M , dass gleichen und nur gleichen Elementen von N gleiche Elemente von M entsprechen, eine Eigenschaft, welche wir auch durch die Formel $m = n$ ausdrücken. Wenn wir nur wissen, dass jedem Elemente von M ein solches

Beweis: Es lässt sich bei jedem gegebenen n eine Zahl $f(n)$ bestimmen, welche anzeigt, wieviel endliche Elemente, aus n Zeichen bestehend, E enthält. Man kann also jedem Elemente von E eine natürliche Zahl zuordnen, und auch umgekehrt, jedem Elemente von A eine endliche Schachpartie, da $\sum_{i=1}^{i=r} f(i)$ für wachsendes r jede Grenze übersteigt. (Man kann bei einer gegebenen endlichen Partie willkürliche Wiederholungszüge einschalten).

$S = C^1)$ (C ist die Menge der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von Nummern).

Beweis: Zunächst wird bewiesen $C \leq S^1)$.

a. Unter S' verstehen wir eine Teilmenge von S , wofür die Wahlfreiheit i auf allen Stufen gleich zwei ist. (Eine solche Menge ist auf viele Weisen konstruierbar; am einfachsten ist wohl die, wobei beide Parteien einen Springerzyklus auf 4 Feldern ausführen. Die Wahlen beziehen sich dann auf die zwei Bewegungsrichtungen in den Zyklen).

Nennen wir weiter V_n die Menge der n -al entwickelbaren Zahlen zwischen 0 und 1, Endwerte inklusive, so ist klar, dass

$$S' \subset V_2,$$

also

$$V_2 \leq S$$

Da bekanntlich:

$$C \subset V_2^{2)}$$

ist auch:

$$C \leq S.$$

b. Wenn n eine Zahl \geq die maximale Wahlfreiheit darstellt. so ist

$$S \leq V_n.$$

Da $V_n \subset C$ (Beweis wie bei V_2), ist auch

$$S \leq C.$$

Aus a und b folgt:

$$S = C.$$

Element von N zugeordnet ist, dass gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, so schreiben wir auch $m \leq n$ oder $n \geq m$.

Vergl. L. E. J. BROUWER, l.c., p. 247 und 252.

¹⁾ Vergl. die Fussnote Seite 3.

²⁾ Der Beweis für diesen Satz sei hier kurz angegeben:

Wenn das Element $a_1 a_2 a_3 \dots$ von C der dual entwickelbaren Zahl

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1 + a_2}} + \frac{1}{2^{a_1 + a_2 + a_3}} + \dots, \text{ entspricht}$$

so werden alle Elemente von C den Elementen von V_2 eindeutig zugeordnet, wobei jedoch das Element 0 von V_2 unbenutzt bleibt. Da aber V_2 mehrere mit A gleichmächtige abtrennbare Teilmengen besitzt, ist folglich $C \subset V$.

(Vergl. L. E. J. BROUWER, l.c., p. 249 und 251).

Auf gleiche Weise geht hervor, dass $U = C$.

Der Beweis $U \neq C$ gelingt nicht; wohl können wir eine Teilmenge U_1 von U konstruieren, welche gleichmächtig ist mit C .

U_1 hat das Erzeugungsgesetz von U mit der Hinzufügung:

Die Erzeugung von einer Stellung, welche entweder sofort (= Eigenschaft P_3) oder nachträglich unbedingt (= Eigenschaft P_4) zu einer ununterbrochenen unendlichen Reihe von Stellungen der Wahlfreiheit 1 führt, gibt Hemmung des Prozesses und Vernichtung seines Resultates. Wir werden in § 3 beweisen, dass sich für jede Stellung entscheiden lässt, ob sie P_3 resp. P_4 besitzt oder nicht.

Wir beweisen jetzt $U_1 = C$.

Beweis: Ein Element von U_1 wird bestimmt von der unendlichen Zeichenfolge $a_1 a_2 \dots a_n \dots$, wobei alle $a_p \leq i_p$ (i_p ist die Wahlfreiheit der zuletzt erzeugten Stellung). Keines dieser i_p kann $= 0$ werden, während auch eine ununterbrochene Reihe von $i_p = 1$ ausgeschlossen ist.

Wir ordnen dieses Element der Zahl:

$$\frac{a_1 - 1}{i_1} + \frac{a_2 - 1}{i_1 i_2} + \frac{a_3 - 1}{i_1 i_2 i_3} + \dots + \frac{a_n - 1}{i_1 i_2 \dots i_n} + \dots, \text{ zu.}$$

Nennen wir die Menge der auf diese Weise entstandene Zahlen I , so ist klar, dass

$$U_1 = I.$$

Die Zahlen der Menge I sind dual entwickelbar, und umgekehrt lässt sich für jedes Element von V_2 die entsprechenden Werte von $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ und $i_1 i_2 \dots i_n \dots$ für willkürlich grosses n ziffermässig berechnen. Da es nun unmöglich ist, dass mehr als m^1) aufeinander folgende Zahlen i den Wert 1 haben, (sonst wären auch alle weitere Zahlen i gleich 1, was, wie oben bemerkt, ausgeschlossen ist) kann die Differenz zwischen einem Anfangssegment der gegebenen dual entwickelbaren Zahl und dem zu berechnenden Anfangssegment des Elementen von I willkürlich klein gemacht werden.

Folglich ist $I = V_2$.

Und da $V_2 = C$ und $U_1 = I$ haben wir bewiesen, dass

$$U_1 = C.$$

Betrachten wir noch die Menge U_2 , welche wir von U abtrennen müssen, um U_1 zu bekommen. U_1 umfasst alle Elemente, in welchen eine Stellung mit der Eigenschaft P_3 vorkommt. Da, wie schon bemerkt, von jeder Stellung zu entscheiden ist, ob sie P_3 besitzt oder nicht, (Beweis siehe § 3) kann man zu jedem n ein $\varphi(n)$ bestimmen, welches angibt, wieviel Elemente nach n Zügen eine P_3 -Stellung enthalten. Da $\varphi(n)$ für wachsendes n jede Grenze übersteigt (man kann vor dem Ent-

¹⁾ m = die Zahl aller Stellungen. Siehe § 1.

stehen der P_3 -Stellung willkürliche Wiederholungszüge einschalten) ist also U_2 abzählbar unendlich:

$$U_2 \sim A.$$

Nennen wir die Vereinigung von E und U_2 , F (ebenfalls $\sim A$) so ist schliesslich S zu zerlegen in zwei Teilmengen U_1 und F , wovon wir bewiesen haben:

$$U_1 \sim C$$

$$F \sim A.$$

§ 3. Die Definition einer Vorzugsrelation (resp. einer endlichen Gruppe von Vorzugsrelationen) zu einer gegebenen S_p , welche Relation im praktischen Spiele mit dem Begriffe "bester Zug" übereinstimmt.

Zunächst wird für jede S_p ein zweiter Index definiert und zwar in folgender Art:

Die wahllosen Stellungen bekommen den Index 0 oder ∞ je nachdem der König im Schach steht oder nicht (matt oder patt).

Weiter bekommt ein S_p den Index 1, wenn wenigstens ein ν zu bestimmen ist, wofür S_{p_ν} wahllos ist ($S_p \rightarrow S_{p_\nu}$).

Wir bestimmen alle Stellungen mit Index 1 (ein endliches Problem) und von den übergebliebenen nennen wir:

$S_p = S_{p(2)}$, wenn für jedes ν gilt: $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(1)}$ ($\nu = 1 \dots i$)

$S_p = S_{p(3)}$, wenn wenigstens ein ν zu bestimmen ist, wofür $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(2)}$.

$S_p = S_{p(4)}$, wenn für jedes ν gilt: $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r_\nu)}$ und die ϱ_ν folgenden Forderungen genügen: 1. ϱ_ν ungerade und ≤ 3 .

2. wenigstens ein $\varrho_\nu = 3$.

$S_p = S_{p(5)}$, wenn wenigstens ein ν zu bestimmen ist, wofür $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(4)}$ während es für jedes ν ausgeschlossen sein muss, dass $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r)}$ (r ist gerade < 4).

Im allgemeinen:

$S_{p_j} = S_{p_j(2n)}$, wenn für jedes ν gilt: $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r_\nu)}$ und die ϱ_ν folgenden Forderungen genügen: 1. ϱ_ν ungerade und $\leq 2n - 1$.

2. wenigstens ein $\varrho_\nu = 2n - 1$.

$S_p = S_{p(2n+1)}$, wenn wenigstens ein ν zu bestimmen ist, wofür $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(2n)}$, während es für jedes ν ausgeschlossen sein muss, dass $S_{p_\nu} = S_{p_\nu(r)}$ (r ist gerade $< 2n$).

Wir setzen dieses Verfahren fort und beschränken unsere Untersuchungen immer auf die übriggebliebenen Stellungen, d.h. diejenigen Stellungen, welche noch keinen zweiten Index tragen.

Da die Zahl der Stellungen endlich ($= m$) ist, so werden wir schliesslich auf eine Zahl q ($\leq m$) kommen, derart, dass keine der übriggebliebenen Stellungen den zweiten Index q hat. Alle höheren Indices sind

dann ebenfalls ausgeschlossen, da eine $S_{\alpha(q+1)}$ nach den Definitionen das Bestehen einer $S_{\beta(q)}$ voraussetzt.

Wir definieren jetzt:

$S_p = S_{p(\infty)}$, wenn S_p keinen endlichen zweiten Index besitzen kann.

Mit Hilfe dieser Festsetzungen können wir in einer gegebenen $S_{p(l)}$ eine Vorzugsrelation definieren.

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $l = \text{gerade}$ (Der Anziehende verliert) Nach der Definition gibt es wenigstens ein ϱ , gleich $l-1$. Die zugehörige Stellung bestimmt die Vorzugsrelation. (resp. die zugehörigen Stellungen bestimmen eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

2. $l = \text{ungerade}$ (Der Anziehende gewinnt) Nach der Definition gibt es wenigstens ein ν , wofür $S_{p\nu} = S_{p, (l-1)}$, und dieses bestimmt die Vorzugsrelation. (resp. eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

3. $l = \text{unendlich}$ (Der Anziehende macht remis). Betrachten wir die zweiten Indices der S_p , welche aus $S_{p(l)}$ entstehen können. Einer davon ist sicher nicht endlich, sonst könnte 1 nicht ∞ sein. Die betreffende Stellung bestimmt dann die Vorzugsrelation (resp. eine Gruppe von Vorzugsrelationen).

(Wenn $1 = 0 (= \text{matt})$, oder $1 = \infty$ und die Stellung wahllos ($= \text{patt}$), gibt es keine Relationen, also auch keine Vorzugsrelation).

Wenn es auch auf den ersten Blick fremd erscheinen dürfte, dass sich aus den Wahlen in einer bestimmten Stellung, deren Konsequenzen sich doch bis ins Unendliche ausdehnen, immer eine herausgreifen lässt, die den Vorzug verdient, so lehrt doch eine nähere Betrachtung, dass dies gar keine Besonderheit ist, da es sich hier eigentlich um ein endliches Problem handelt.

Statt des zu jeder Stellung gehörigen Verzweigungsagglomerates können wir uns, wenn wir nach dem besten Zuge fragen, auf ein endliches Gerippe desselben beschränken. Wir dürfen nämlich in diesem Falle alle Zeichenfolgen, worin zweimal dieselbe Stellung auftritt nach der Wiederholung abbrechen und das Resultat als unentschieden betrachten. Auf diese Weise wird nicht nur die Zügezahl von jeder Partie endlich ($\leq m$), sondern auch die Zahl aller Partien. ($< \sigma^m$; $\sigma =$ die maximale Wahlfreiheit).

Dass tatsächlich die Rückkehr der selben Stellung hier als remis gelten muss, folgt aus der Erwägung, dass in jeder gewonnenen oder verlorenen Stellung bei beiderseits korrekt geführtem Spiel (wie wir dies oben definiert haben), der zweite Index fortwährend um eins verringert wird, sodass eine Wiederholung der Stellung gar nicht vorkommen kann. (Der Gewinner darf nicht an den Rand der endlichen Untermenge kommen, denn dies erhöht den Index, der Verlierer kann dort nicht hinkommen: das höchste was er erreichen kann, ist, dass sein zweiter Index nur um eins verringert wird, während am Rande ein früherer d.h. höherer Index steht).

Gehen wir von einer Remisstellung $S_{p(\infty)}$ aus, und bricht eine even-

tuelle Wiederholung in der endlichen Menge den Prozess als unentschieden ab, so wäre das Resultat nicht anders gewesen, wenn wir auch das fortgesetzte unendliche Agglomerat untersucht hätten. Die beiderseits korrekte Spielweise in einer Remisstellung lässt ja den zweiten Index fortwährend ∞ .

Auf ähnlichen Erwägungen beruhen die Sätze P_1, P_2, P_3, P_4 aus den vorigen Paragraphen, deren Beweise wir noch schuldig sind.

a. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_1 besitzt oder nicht. (P_1 ist die Eigenschaft einer Stellung, in keinerlei Art zu einer wahllosen führen zu können).

Beweis: Betrachten wir die endliche Untermenge einer willkürlichen S_r . Kommt hierin keine einzige wahllose Stellung vor, so muss dies auch der Fall sein in der vollständigen Menge (von S_r ausgehend), denn durch den Übergang zu dieser vollständigen Menge können, wie leicht ersichtlich, auf keine Weise neue Stellungen entstehen. Es genügt also, diese Untermenge zu untersuchen, welche Untersuchung für jede Stellung nach einer endlichen Zahl von Schritten zu dem Ergebnis P_1 oder non- P_1 führt.

b. Von jeder Stellung ist zu entscheiden ob sie P_2 besitzt oder nicht. S_2 ist die Eigenschaft einer Stellung, forciert zu einer wahllosen Stellung führen zu müssen).

Beweis: Man untersuche die endliche Untermenge einer willkürlichen Stellung S_r . Sind alle Endpunkte wahllos, so ist klar, dass die Untermenge zu gleicher Zeit die vollständige Menge darstellt und S_r also P_2 wohl besitzt.

Gibt es dagegen einen nicht wahllosen Schluss ($S_r - S_{r_1} - S_{r_2} \dots S_{r_p} \dots S_{r_a}$, wobei $S_{r_p} \equiv S_{r_a}$) so kann man die Zugfolge S_{r_p} bis S_{r_a} unendlich wiederholen, aus welchem Umstand hervorgeht, dass S_r die Eigenschaft P_2 nicht besitzt.

c. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_3 besitzt oder nicht. (P_3 ist die Eigenschaft einer Stellung, unmittelbar zu einer ununterbrochenen unendlichen Reihe von Stellungen der Wahlfreiheit 1 zu führen).

Beweis: Betrachten wir die endliche Untermenge einer willkürlichen S_r . Wenn diese ausschliesslich aus Stellungen der Wahlfreiheit 1 besteht, so ist dies auch der Fall mit der vollständigen Menge und besitzt S_r somit die Eigenschaft P_3 . Kommt in dieser Untermenge jedoch eine einzige Verzweigung vor, so können wir auf non- P_3 schliessen.

d. Von jeder Stellung ist zu entscheiden, ob sie P_4 besitzt oder nicht. (P_4 ist die Eigenschaft, nachträglich, aber unbedingt, also in allen möglichen Verzweigungen, zu einer Stellung der Eigenschaft P_3 zu führen).

Beweis: Man untersuche die endliche Untermenge einer willkürlichen Stellung S_r . Besitzen alle Endpunkte die Eigenschaft P_3 , so besteht die weitere Fortsetzung ausschliesslich aus 1-wähligen Stellungen, und besitzt S_r die Eigenschaft P_4 . Gibt es dagegen einen Endpunkt, der die Eigenschaft P_3 nicht besitzt, ($S_r - S_{r_1} - S_{r_2} \dots - S_{r_p} - \dots S_{r_a}^v$, wobei $S_{r_p} \equiv S_{r_a}$) so lässt sich durch unendliche Wiederholung von S_{r_p} bis S_{r_a}

eine Zeichenfolge bilden, welche keine Stellung der Eigenschaft P_3 enthält, womit also bewiesen ist, dass S_r die Eigenschaft P_4 nicht besitzt.

§ 4. *Der Einfluss der Remisregeln auf die Unendlichkeit der Menge S .*

Die Regeln, deren Einfluss wir untersuchen werden, lauten:

50-Züge-Regel: die Partie ist remis, sobald in 50 Zügen weder ein Bauer gezogen, weder ein Stein geschlagen wurde.

Englische Regel: die Partie ist remis, sobald dreimal dieselbe Stellung entstanden ist (dieselbe Partie am Zuge).

Deutsche Regel: die Partie ist remis, wenn dreimal nacheinander dieselbe Zufolge geschehen ist.

Es ist ohne weiteres klar, dass sowohl die erste wie die zweite Regel das endlich werden der Menge zu Folge hat. Anders ist es mit der deutschen Regel, welche die Unendlichkeit der Menge S bestehen lässt, da es, wie wir beweisen, möglich ist, eine aus zwei Zeichen bestehende Folge zu konstruieren, in der keine einzige dreifache Wiederholung (von einem oder von mehreren Zeichen) auftritt.

Beweis: Nennen wir die Zeichen a und b , so lautet die Folge: $abba\ baab\ baab\ abba\ \dots$ mit dem Fortschrittgsgesetz: das $(2^n + a)$ -te Zeichen soll ungleich dem a -ten sein für jedes n und für jedes $a \leq 2^n$.

Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

1. Das $(4m + 1)$ -ste Zeichen ist immer ungleich dem $(4m + 2)$ -ten.
Das $(4m + 2)$ -te Zeichen ist immer gleich dem $(4m + 3)$ -ten.
Das $(4m + 3)$ -te Zeichen ist immer ungleich dem $(4m + 4)$ -ten.
Das $(4m + 4)$ -te Zeichen kann sowohl gleich als ungleich dem $(4m + 5)$ -ten sein.
2. Lassen wir die Zeichen an der 2ten, 4ten, 6ten, 8ten ... Stelle fort, so entsteht genau dieselbe Folge (Allgemeiner: wenn wir das 1ste, $(2^n + 1)$ ste u.s.w. fortlassen).

Nehmen wir jetzt an, die Folge besitze eine dreifache Wiederholung von p Zeichen und $p \geq 5$, so besitzt diese Zeichengruppe sicher zwei aufeinanderfolgende gleiche Elemente. Da das erste von zwei gleichen Zeichen immer an einer geraden Stelle steht (Eigenschaft 1), so muss p gerade sein.

Wenden wir jetzt die zweite Eigenschaft an, so ist klar, dass die Folge ausser der sich wiederholenden Zeichenfolge von p Termen, noch eine Gruppe von $1/2 p$ Termen besitzt, welche sich ebenfalls dreimal wiederholt. Eine Wiederholung von p Termen ($p \geq 5$) bringt immer eine Wiederholung von $1/2 p$ Termen mit sich. Es bleibt also noch zu beweisen, dass eine Wiederholung von weniger als 5 Termen ausgeschlossen ist.

Für $p = 2$ oder $p = 4$ wenden wir die Eigenschaft 2 noch einmal resp. zweimal an und kommen für $p = 1$ zu einem Widerspruch: das Fortschrittgsgesetz erlaubt nicht, dass nacheinander drei gleiche Zeichen vorkommen.

in n Zügen möglich ist oder nicht. Eine obere Grenze für n besteht aber nicht und bei der systematischen Untersuchung der Stellungen muss also immer mit drei Möglichkeiten gerechnet werden:

primo: Es lässt sich beweisen, dass ein Matt in einer endlichen Zügezahl erreichbar ist.

secundo: Es lässt sich beweisen, dass ein Matt von der gegebenen Stellung aus unmöglich ist.

tertio: (non exclusum!) Weder das Matt, noch das unmöglich sein eines Matts ist bewiesen, und man hat keine Gewissheit, ob die Fortsetzung der Untersuchung je über das eine oder das andere eine Entscheidung bringen wird.

Hydrodynamics. — *On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion. II.* ¹⁾ By J. M. BURGERS. (Mededeeling N^o. 12 uit het laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft). (Communicated by Prof. P. EHRENFEST).

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

4. Examination of the function φ . — Flow between fixed parallel walls.

The object of this second part is mainly to consider more in detail some of the suppositions made in Part I, especially as an examination of the properties that must be assigned to the function φ led to results, which for one part seemed promising, but at the other side pointed to a formula for the distribution of the velocity U of the mean flow, rather differing from that which is found experimentally.

The function φ_k was defined in equation (20); it depends only on the y -coordinate of the point k . By eliminating t_k between (24) and (22) we get the integral equation for φ_k :

$$\varphi_k = 2C - R^{-1} - 2A \sum_{\xi} t_k(\xi) e^{-\beta \sum_l \{ R^{-2} z_l(\xi) - \varphi_l t_l(\xi) \}} \quad (25)$$

In studying this equation we have to demand in the first place that the summation extended over the ξ -space shall be convergent. This makes it necessary that the exponential function becomes zero, when the ξ 's go to infinity in any arbitrary direction. ²⁾ The functions $z_l(\xi)$ are essentially positive; the functions $t_l(\xi)$ may be negative as well as positive (comp. eq. 11^a, 11^b); hence it is necessary that β shall be positive, and secondly that the form:

$$\epsilon^{-2} \Phi \equiv \sum_l \{ R^{-2} z_l(\xi) - \varphi_l t_l(\xi) \} \quad (26)$$

or written in full:

$$\epsilon^{-2} \Phi \equiv \sum_l \left\{ \frac{(4\xi_l - \xi_{l+1} - \xi_{l+i} - \xi_{l-1} - \xi_{l-i})^2}{R^2 \epsilon^4} - \frac{\varphi_l (\xi_{l+1} - \xi_{l-1}) (\xi_{l+i} - \xi_{l-i})}{4\epsilon^2} \right\} \quad (26^a)$$

¹⁾ Part I has appeared in these Proceedings 32, p. 414, 1929. The reader is asked to correct an error of print in equation (24): the exponent of ϵ must be read:

$$-\beta \sum_l \left\{ \frac{z_l(\xi)}{R^2} - (2C - R^{-1} - 2\bar{t}_l) t_l(\xi) \right\}.$$

²⁾ Every term of the summation relates to one of the cells in which the whole of the ξ -space was supposed to be divided.

(in which φ is independent of the ξ 's) shall be a *positive definite* quadratic function of the N variables $\xi_1 \dots \xi_N$. Clearly this imposes a certain condition on the function φ . If f.i. we assume that φ is positive, then it will be seen that when Φ should be negative for a certain direction of the ξ -space, which of course is possible only for a direction giving positive values of t_i in the greater part of the field, the right hand side of equation (25) would become negative infinite, and no solution could be obtained. If φ had too large negative values in some part of the field (it cannot be negative everywhere), then difficulties of the same kind may arise for directions in the ξ -space giving negative values of t_i in that part of the field.

Before investigating the condition satisfied by φ , however, I should prefer first to deduce the corresponding formulae for the case of the flow between two fixed parallel walls, as this case affords a better possibility for a comparison with experimental results.

In the case of the flow between fixed walls we shall denote the distance of the walls by h ; the mean velocity of the flow over a cross section of the channel by V_0 ; the pressure gradient ($-dp/dx$) by J , and the frictional force per unit area of the walls by S . Then: $2S = Jh$. We again shall use nondimensional variables by dividing all lengths by h , all velocities by V_0 , etc.; further we put $R = \varrho V_0 h / \mu$ and $C = S / \varrho V_0^2 = Jh / 2 \varrho V_0^2$. The origin of the system of coordinates will be placed midway between the walls, so that the latter are situated resp. at $y = -\frac{1}{2}$ and $y = +\frac{1}{2}$. The equation for the mean motion now becomes:¹⁾

$$\frac{1}{R} \frac{dU}{dy} = -2Cy + \overline{uv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

(on account of the symmetry both dU/dy and \overline{uv} are zero in the axis of the channel). As $U=0$ at both walls we have the relation:

$$-\int dy y \frac{dU}{dy} = \int dy U = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

from which we deduce:

$$C = 6 \int dy y \overline{uv} + 6R^{-1} = \frac{6}{L} \iint dx dy y \overline{uv} + 6R^{-1} \quad . \quad . \quad (29)$$

The limits of the integration with respect to y are $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ (unless purposely specified otherwise); those with respect to x : $x_0, x_0 + L$.

The dissipation condition also in this case has the form given in equation (2). Part I. Eliminating again dU/dy and C , and using the abbreviations (3), we get:

¹⁾ Comp. also: J. M. BURGERS, these Proceedings 26, p. 601, 1923. The value of C in that paper, however, is twice the value taken here; moreover the origin of the coordinates had been put in one of the walls.

$$F \equiv \iint dx dy (\bar{t})^2 - \frac{12}{L} \left(\iint dx dy y \bar{t} \right)^2 + \left. \begin{aligned} & + \frac{12}{R} \iint dx dy y \bar{t} + \frac{1}{R^2} \iint dx dy \bar{z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

When now we introduce once more the system of representative points in the ξ -space, we can express this condition in the following form, analogous to (13):

$$\varepsilon^{-2} F \equiv \sum_k \left(\sum_{\xi} \nu t_k \right)^2 - \frac{12 \varepsilon^2}{L} \left(\sum_k \sum_{\xi} \nu y_k t_k \right)^2 + \frac{12}{R} \sum_k \sum_{\xi} \nu y_k t_k + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{R^2} \sum_k \sum_{\xi} \nu z_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

This formula enables us to calculate the variation of F produced by an arbitrary variation of one of the ν 's. In order to make our formulae correspond as much as possible to those of § 3, we put:

$$\frac{24 \varepsilon^2}{L} y_k \sum_{k'} \sum_{\xi'} \nu y_{k'} t_{k'} (\xi') - 2 \sum_{\xi'} \nu t_k (\xi') - 12 y_k R^{-1} = \varphi_k \quad (32)$$

Then:

$$\varepsilon^{-2} \delta F = \sum_k (R^{-2} z_k - \varphi_k t_k) \delta \nu = \varepsilon^{-2} \Phi \delta \nu \quad (33)$$

when we use the same formula (26) as before. This again leads to (21) as the expression for the "most probable distribution". Hence the same condition has to be imposed on Φ , and consequently on φ , as in the former case.

From (32) the following expressions can be deduced for the new function φ :

$$\varphi = 24 y \int dy y \bar{t} - 2 t - 12 y R^{-1} = -y (4 C - 12 R^{-1}) - 2 \bar{t} = \left. \begin{aligned} & = R^{-1} \left(2 \frac{dU}{dy} + 12 y \right) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

At the wall $y = -\frac{1}{2}$, where $t = 0$, the function φ has the value:

$$\varphi \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 C - 6 R^{-1} \quad (34^a)$$

at the other wall it has the opposite value, whereas in the axis of the channel:

$$\varphi(0) = 0 \quad (34^b)$$

Finally:¹⁾

$$-\int_{-1/2}^0 dy y \varphi = \frac{1}{2} R^{-1} \quad (34^c)$$

¹⁾ The corresponding relation in the former case is: $\int_0^{1/2} \varphi dy = \frac{1}{2} R^{-1}$.

It seems reasonable to suppose that in this case (as well as in the former one), φ is a monotonous function of y in either half of the channel breadth. This of the course implies the same character for the part of the frictional force due to the presence of the relative motion, i.e. for $t = -uv$, and for dU/dy . There has never been an indication to the contrary, and also from the theoretical point of view there seems to be no reason why it should be otherwise, unless it be supposed that types of relative motion with a very definite "wave pattern" over the breadth of the channel should be preponderant. This seems improbable, however, at least in the case of smooth walls.

We now return to the condition to be fulfilled by Φ and "re-translate" this condition into the language of the continuous field, by putting in (26):

$$z = \zeta^2 = (\Delta \psi)^2, \quad t = -uv = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

and substituting integration with respect to x and to y for the summation over the points of the lattice. In this way we get:

$$\Phi \equiv \iint dx dy \left\{ R^{-2} (\Delta \psi)^2 - \varphi(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} > 0 \quad \dots \quad (35)$$

for all possible functions ψ , satisfying the boundary conditions $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ at both walls.

Now from investigations by LORENTZ and by ORR it can be deduced that there exist types of motion, wholly enclosed within a strip of breadth D and satisfying the boundary conditions at the borders of the strip, for which:

$$\int dx \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ for no value of } y \text{ is negative} \quad \dots \quad (a)$$

$$\iint dx dy (\Delta \psi)^2 = \frac{A}{D^2} \iint dx dy \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dots \quad (b)$$

where A is a certain coefficient, the lower limit of which is, according to ORR, 177.¹⁾ We shall suppose that such a motion is present in the strip $-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2} + D$, where $D < \frac{1}{2}$; outside of this strip ψ shall have the value zero. Then, if φ_{min} denotes the smallest value of φ occurring in this strip, we have:

$$\iint dx dy \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} > \varphi_{min} \iint dx dy \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ or } > \varphi_{min} \frac{D^2}{A} \iint dx dy (\Delta \psi)^2.$$

¹⁾ Comp. H. A. LORENTZ, Abhandl. über theoretische Physik, 1, p. 48; W. MC. F. ORR, Proc. Roy. Irish Acad. 27, p. 124–128, 1907. I must confess that I have controlled the formula (a) only for the case of the LORENTZ' vortex; if this formula should not apply to the function which according to ORR gives the lowest value for A , a somewhat higher value of A ought to be accepted in the following calculations, though probably still less than LORENTZ' value 288 for the elliptic vortex.

Substituting this into (35) we find:

$$\varphi_{min} < \frac{A}{R^2 D^2}.$$

On account of our supposition about the monotonous character of φ , the smallest value in such a strip is to be found at the border $y = -\frac{1}{2} + D$; hence, writing temporarily y' for $\frac{1}{2} + y$, we get:

$$\varphi(y') < \frac{A}{R^2 y'^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (36)$$

As on the other hand the maximum value of φ is given by (34^a), we must conclude that φ everywhere lies below the curve given in the accompanying diagram fig. 1. Calling δ the value of y' for which the

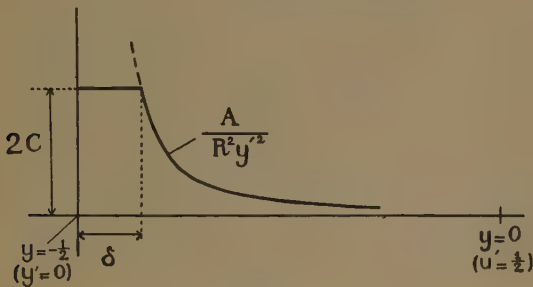


Fig. 1.

limiting value (36) becomes equal to $2C$, we easily deduce from fig. 1:

$$-\int_{-1/2}^0 dy y \varphi < \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dy' \varphi < C \delta + \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\infty} dy' \frac{A}{R^2 y'^2}, \text{ or } < \frac{\sqrt{2AC}}{R}.$$

Comparing this with (34^c), we obtain:

$$C > \frac{1}{8A} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (37)$$

Taking $A = 177$ (the lower limit given by ORR), we find:

$$C > 0.00070.$$

This result is interesting as it has been (and still is) a matter of discussion, whether in the case of absolutely smooth walls the resistance coefficient $C = S/\rho V_0^2$ will decrease to zero for infinite values of the REYNOLDS' number or not.¹⁾ It is generally accepted that this coefficient is approximately independent of the form of the section of the channel, provided that the REYNOLDS' number is defined in all cases by means

¹⁾ Comp. L. HOPF, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 3, p. 329, 1923; TH. V. KARMAN, Proc. 1st Intern. Congress for Appl. Mech., Delft, 1924, p. 103; L. SCHILLER, Physik. Zeitschr. 26, p. 473, 592, 1925.

The same relation is obtained in the case of the flow between two walls, moving with respect to each other, and as far as I can see the case of the motion through a tube with circular section does not promise a different result, so that the discrepancy from the experimental data is even greater here.¹⁾

5. Review of the assumptions made in § 2; physical interpretation of the condition $\Phi > 0$.

In view of the discrepancy mentioned at the end of the foregoing §, it seems worth while to consider again the principal suppositions that have been made.

The basis of our assumptions was that, apart from the boundary conditions and the equation of continuity, the dissipation condition is the only equation governing the turbulent motion.

We have pictured in the ξ -space the assembly of all possible fields, satisfying the boundary conditions and the equation of continuity. Every imaginable type of motion, LORENTZ's vortices, ORR's solutions, all kinds of solutions constructed by various authors have their representative points in this space, just as well as wholly arbitrary fields. The various intensities of one and the same type of field are represented by points, lying at various distances on the same radius vector through the origin.

Then we have sought for a principle for selecting a set of M points, satisfying (13) or in the other case considered (31), that might serve as an appropriate basis for calculating the necessary mean values. As this principle we have chosen a probability hypothesis, and it is perhaps not superfluous to remember that we have not spoken about the probability of any special type of relative motion, or of a certain distribution of vortices, etc.; what we have counted was on the contrary the number of various sequences in which the set of M individual fields of flow could be arranged. It is only at the end of the calculations that we come to formula (21), which gives a measure for the statistical frequency of any special field.

This formula (21) possesses some properties which make it appear rather appropriate for the description of the turbulent motion. In the first place it contains no undetermined constants. As the exponent of e is a quadratic function of the variables $\xi_1 \dots \xi_N$ (comp. formula 26^a), the integration with respect to any of the ξ 's can be effected in an elementary way; the great number of the variables (which in the limit ought to be made infinite) makes this procedure impractical, however, especially on account of the appearance of the function φ . Though a method for solving this difficulty has not yet been found, still we see from the integral equation either for \bar{t} or for φ , that the mean amplitude of the

¹⁾ The result for the tube with circular section is not obtained by means of the statistical method, as no generalisation for the three-dimensional case has been made. The deductions of § 5, however, can be extended to this case.

relative motion is wholly determined — a consequence of the circumstance that the dissipation condition in its forms (5) or (30) is not homogeneous with respect to this amplitude.

Formula (21) automatically yields the so-called "laminar layers" along the walls of the channel. In consequence of the boundary conditions all types of motion that present appreciable values of u and v in the neighbourhood of the walls necessarily bring with them very great values of z ; hence as φ cannot surpass the value $2C$, the term $\sum_k R^{-2} z_k$ in the exponent will become preponderant, making the value of ν for such fields become very small.

Finally, assuming (provisionally) that φ is a monotonous function of y in every half of the channel breadth, which consequently always has the same sign as dU/dy , we deduce from the formula (21) that everywhere those types of fields have the greatest chance of occurring, that give values for $t = -uv$ of the same sign as dU/dy — just as it must be in order to account for the observed great value of the resistance. Hence the necessary "correlation" between u and v comes in automatically (through the intermediary of the dissipation condition), notwithstanding the fact that we have not made use of the otherwise very important theories about the origin of this correlation, as have been worked out by TAYLOR, PRANDTL and others. Their deductions, however, introduce the conception of a "mean free path" of the elements of the fluid, which in itself is an unknown quantity.

The fact that the correlation in our results comes in automatically is due to the circumstance that the increase of the energy of the relative motion at any instant is mainly determined by the formula:

$$E = \iint dx dy \left\{ -uv \frac{dU}{dy} - R^{-1} \zeta^2 \right\} (39)$$

which is positive for fields having the right correlation (combined with not too great values for ζ^2), whereas it is negative for fields with the wrong correlation.¹⁾

It is not, however, this expression which occurs in the exponent of

¹⁾ The equation for E , when written in full, contains besides those given in the text, a number of other terms, relating to the cross sections of the channel at x_0 and $x_0 + L$, which usually are considered as of no importance, and further the integral

$$\iint dx dy \left(u \frac{d\overline{uv}}{dy} + v \frac{d\overline{v^2}}{dy} \right),$$

(comp. H. A. LORENTZ, l.c. p. 63) of which only the first term is important. This term changes of sign, when the direction of the relative motion is inverted over the whole field, which is not the case with the terms written in (39). Such an inversion of the relative motion has no influence on our formulae, which have been either of the 2nd or of the 4th degree in u, v, ζ .

formula (21), but the function Φ , or as we may write it for purpose of comparison, making use of (34):

$$-R \Phi = \iint dx dy \left\{ -uv \left(2 \frac{dU}{dy} + 12y \right) - R^{-1} \zeta^2 \right\} \quad (40)$$

We have demanded that $-\Phi$ always should be negative; this of course may be very well compatible with a positive value of (39).

In this connection it is of importance to remark that the expression (40) has a meaning wholly apart from the introduction of the ξ -space or of the probability hypothesis. In order to show this, we start from the equation:

$$\bar{E} = \iint dx dy \left\{ -\overline{uv} \frac{dU}{dy} - R^{-1} \bar{\zeta}^2 \right\} \quad (41)$$

which determines the rate of increase of the mean energy of the relative motion. In the normal turbulent state the mean energy of the relative motion has a constant value; so then $\bar{E} = 0$ and (41) becomes identical with equation (2), Part I.

Now the turbulent motion when viewed „microscopically”, i.e. at a series of instants with sufficiently small intervals between them, must be considered as a sequence of widely varying types of fields of flow, and the quantities \overline{uv} , $\bar{\zeta}^2$ are obtained as a mean over the values of uv , ζ^2 presented by every individual member of the sequence. The order of the various individual fields in the sequence is of no importance in our considerations; it seems legitimate, however, to suppose that in a long interval of time, most types occur repeatedly, at least with a certain degree of approximation, and that a mean amplitude can be assigned to each of them (as in fact has been assumed in all our deductions and is expressed by formula (21)). Let us compare this normal state with one, in which the intensity of one of the members of the sequence has been changed, f.i. by first increasing it for a short interval of time and then diminishing it, in such a way that the mean values of linear quantities are not altered, whereas those of quantities of the second degree are increased in a given constant proportion. We shall suppose moreover that this variation is executed every time this type of motion appears. When the velocity components and the vorticity of this special type of flow are proportional resp. to u' , v' , ζ' , then in the varied sequence the values of u , v , ζ will again be zero, whereas the values of \overline{uv} , $\bar{\zeta}^2$, etc. in any point of the field will change with amounts proportional to the values of $u'v'$, ζ'^2 , etc. at that point. Hence we may write:

$$\delta \overline{uv} = u'v' \delta \alpha, \quad \delta \bar{\zeta}^2 = \zeta'^2 \delta \alpha. \quad (42)$$

where $\delta \alpha$ is a positive number, depending on the degree of the intensification and the interval of time during which it is applied, but independent of x and y and of the time.

by the varied sequence, is everywhere parallel to the axis of x . Hence we have to start from the general equations:

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + R^{-1} \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + R^{-1} \Delta V - \frac{\partial}{\partial x} \overline{uv} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^2} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

whereas the energy equation becomes:

$$\overline{E} \equiv \int (PU)_I dy - \int (PU)_{II} dy - R^{-1} \iint dx dy \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \overline{\zeta^2} \right\} \quad (45)$$

Here V denotes the y -component of the mean motion, P the mean pressure at any point. The first and the second integrals in the expression for \overline{E} represent the work done by the mean pressures in the sections I (at x_0) and II (at $x_0 + L$); the third term is the total loss of energy, due to the internal friction. The equation for \overline{E} is not strictly true as some terms have been neglected which partly measure the work done at the sections I, II by the varying pressures, etc. of the relative motion, and partly the kinetic energy which is transported across these sections. We may discard these terms, however, as the amount contributed by them remains nearly constant when L is increased without limit. If equation (45) had been divided by L , then these terms would become of the order L^{-1} .

In the normal state we have $\partial U / \partial x = 0$, $V = 0$, $\partial \overline{u^2} / \partial x = 0$, $\partial \overline{uv} / \partial x = 0$; further: $P = \text{Constant} - \int x - \overline{v^2}$, where \int is the pressure gradient.

Now we apply our variation, then $\delta u^2 = u'^2 \delta a$, etc. When we consider a field of motion resembling those described by ORR, which are stretched out over indefinite lengths and are more or less periodic with respect to x , we see that integrals of the type $\int \delta \overline{u^2} dx$ are to be considered as

quantities of the order of L , in view of which various other quantities may be neglected. In the case of a field vanishing beyond a certain distance (like LORENTZ' vortex) the quantities that are neglected automatically become zero, when the sections I, II are put away far enough.

Having regard to the relations which are fulfilled in the normal state, and observing that δU and δV must obey the equation of continuity, we obtain:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \delta U + \frac{dU}{dy} \delta V - R^{-1} \Delta (\delta U) + \frac{\partial}{\partial x} \delta P = -\delta a \left(\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right) \quad (46^a)$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} \delta V - R^{-1} \Delta (\delta V) + \frac{\partial}{\partial y} \delta P = -\delta a \left(\frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) \quad (46^b)$$

and further:

$$\delta \bar{E} = \int dy (U \delta P + P \delta U)_I - \int dy (U \delta P + P \delta U)_{II} - \left. - R^{-1} \iint dx dy \left\{ 2 \frac{dU}{dy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta U - \frac{\partial}{\partial x} \delta V \right) + \zeta'^2 \delta \alpha \right\} \right\} \quad (47)$$

The latter equation can be simplified by making use of the condition that $\int U dy$ must remain constant and by neglecting terms which do not become of the order of L ; in this way we get:

$$\delta \bar{E} = \int dy U (\delta P_I - \delta P_{II}) - R^{-1} \iint dx dy \left\{ 2 \frac{dU}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \delta U + \zeta'^2 \delta \alpha \right\} \quad (48)$$

Now from equation (46^a), by integrating it with respect to x and again neglecting terms which do not become of the order of L , we deduce:

$$\delta P_I - \delta P_{II} = -R^{-1} \int dx \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta U + \delta \alpha \int dx \frac{\partial u' v'}{\partial y} \quad . . . \quad (49)$$

As equation (46^b) shows that $\partial \delta P / \partial y$ does not become of the order of L , we may to the order of approximation accepted, consider $\delta P_I - \delta P_{II}$ as independent of y . Then the first term of the expression (48) becomes simply $\delta P_I - \delta P_{II}$.

By multiplying equation (49) by $(\frac{3}{2} - 6y^2)$ and integrating it over the breadth of the channel (applying partial integration), we obtain:

$$\delta P_I - \delta P_{II} = 12 \delta \alpha \iint dx dy y u' v' \quad . . . \quad (a)$$

On the other hand the first term of the second member of the expression (48) may be transformed (again making use of partial integrations and of (49)) as follows:

$$-R^{-1} \iint dx dy 2 \frac{dU}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \delta U = -2(\delta P_I - \delta P_{II}) - 2 \delta \alpha \iint dx dy \frac{dU}{dy} u' v' \quad (b)$$

Hence finally we obtain:

$$\frac{\delta \bar{E}}{\delta \alpha} = \iint dx dy \left\{ -u' v' \left(2 \frac{dU}{dy} + 12y \right) - R^{-1} \zeta'^2 \right\} \quad . . . \quad (50)$$

in which the same expression appears as in (40).

So the condition for the positive definite character of the function Φ appears to be identical with the condition (43).

The above calculations can be extended also to the case of the flow through a cylindrical pipe with an arbitrary form of section, where the relative motion is three-dimensional.

6. Concluding remarks.

As has been mentioned at the end of § 4 the observed distribution

of the velocity of the mean motion does not correspond to that given by equation (38). The value of dU/dy appears to be much smaller, even so much that the condition $\delta\bar{E}/\delta\alpha$ seems not to be fulfilled for some types of relative motion, possessing values of $u'v'$ of the opposite sign of that which corresponds to the usual correlation. So we have to suppose that an abnormally frequent occurrence of such types of motion is prevented by some other cause, which is not revealed in our deductions.

When we come back once more to our starting point: that the dissipation condition in the case of the turbulent motion of a viscous fluid plays the same role as the condition of constant energy in the case of a conservative system, it is necessary to point out one great difference between the two conditions. The condition of constant energy in a conservative system is an exact and an absolute one, which is valid at every moment. The dissipation condition, on the other hand, is not a condition governing the instantaneous state of the turbulent motion; it expresses a relation which is fulfilled approximatively when we consider the history of our system, during a great interval of time. This becomes especially clear in view of the deductions concerning the quantity $\delta\bar{E}/\delta\alpha$, where we considered a variation of the system, which could establish itself only in a very long time. The dissipation condition seems to be too "elastic" to make feel its influence immediately when any deviation from the "normal state" occurs.

There is no doubt, of course, that the dissipation condition has to be fulfilled. The question is, however, which is the variational equation that governs the exponent of the distribution function?

When it could be supposed that the expression (39) for the increase of the instantaneous energy exerted some influence on the statistical distribution, and that the exponent occurring in (21) consisted of a linear combination of both (39) and (40), in such a way that we could write for the function φ in (21), (35) etc.:

$$\varphi = R^{-1} \left(\frac{2 + \lambda dU}{1 + \lambda dy} + \frac{12y}{1 + \lambda} \right),$$

then a distribution of the velocity might be obtained, corresponding somewhat better with that observed experimentally. So $\lambda = 3$ would give: $U \leq 1.1 - 1.2 y^2$; the lower limit for C then becomes: $1/5 A = 0.0011$.

I have not succeeded in finding an equation which seems to lead to such a formula. There is, however, another way which promises some help: in order to define the mean motion we may make use of mean values with respect to x in stead of mean values with respect to time. In this way the difficulties mentioned are obviated to some extent, and a form of the dissipation condition is obtained, which leads to a variational equation, differing from the one used until now. In Part III of this paper we hope come back to this point.¹⁾

¹⁾ This remark has been added in the proof.

Using partial integrations we obtain on the other hand:

$$\begin{aligned} \iint dx' dy' G^* \delta \left\{ \dots \right\} &= \\ &= - \iint dx' dy' \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left(G^* \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x'} \right) + \dots \right\} \delta \Psi = \\ &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \left(G^* \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \Delta \left(G^* \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left(G^* \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y'} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y'} \Delta \left(G^* \frac{\partial \Psi}{\partial x'} \right) \right\} \delta \xi_k \end{aligned}$$

$\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix}$

if x is sufficiently great.

When we perform the differentiations, and remember that $\Delta G^* = 0$, then we may transform this expression and obtain:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_k} = \gamma = -2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial x' \partial y'} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} \right) \right\},$$

in which formula after the execution of the differentiations we have to put $x' = x$, $y' = y$.

In the case of a straight channel we have:

$$\left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x' \partial y'} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^*}{\partial y'^2} \right) \text{ is independent of } x.$$

$\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix} \qquad \qquad \begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix}$

Hence:

$$\iint dx dy \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_k} = -2 \int dy \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 G^2}{\partial y'^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{x_0}^{x_0 + L}.$$

$\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix}$

Here the integral is not strictly zero, but is reduced to integrals over the boundaries of the field at x_0 and at $x_0 + L$.

When the channel is closed, these terms may cancel. In any case this can be proved for the space between two concentric cylinders. By introducing polar coordinates γ is transformed into an expression of the form:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{r^2 \partial \theta} \right) f,$$

where f is some function of r only. As Ψ is an univalued function, the integral of this expression over the whole field is zero.

Hydrodynamics. — *Improved instrument for the simultaneous determination of the static pressure, the magnitude and the direction of the velocity of fluids.* By B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN. (Mededeeling N^o. 13 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.) (Communicated by Prof. P. EHRENFEST.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

In the following lines an instrument is described for the simultaneous determination of the static pressure, the magnitude and the direction of the velocity in fluids and gases. The quantity observed is the pressure exerted by the fluid at various points of a spherical form of Pitot tube, placed within the field of flow; the practical application has been worked out in the aerodynamical laboratory of the Technical University Delft with the special intention of obtaining a good sensitivity over a high range of angular deviation between the direction of the flow and the shaft of the instrument.

Taking the static pressure p , the magnitude of the velocity V and the direction of the flow as independent variables (the latter one being counted as two), these quantities can be determined from pressure readings on four pressure holes in a sphere, which are not symmetrically located with respect to the direction of the flow. These four holes can be reduced to three when one of them is not materially executed, but the pressure at the place of this one is determined by means of one of the other holes, turned in the exact position by rotating the sphere.

The principle of this instrument — a sphere with a number of pressure holes, each of which is connected with a manometer — is not new: probably it is originated by ELLON and VON CORDIER, who used a sphere with two pressure holes; BORREN¹⁾, improving their apparatus, extended this number to three, whereas for reasons of more accurate work, greater simplicity of the required manipulations and an extended range of suitability than could be obtained with the disposition of the holes according to BORREN, it is five in the present "Pitot sphere".

The direction of the velocity with respect to a polar coordinate system fixed in space, the shaft of the Pitot sphere being used as polar axis, is determined by two angles: δ , between this direction and the aequatorial plane through the sphere perpendicular to the shaft (δ in the following is taken positive when the direction of the flow makes an obtuse angle with

¹⁾ J. J. BORREN: Een nieuwe methode ter bepaling van grootte en richting der stroomsnelheid van vloeistoffen; Thesis Delft, 1921.

the shaft), and ψ , between the meridian plane containing the velocity and a fixed plane passing through the shaft; both angles are represented in fig. 1.

In order to determine the angle ψ the instrument has to be rotated about the axis of the shaft until the pressures on the holes N^o. 4 and 5 (see fig. 1) are equal. A graduated disc is mounted at the end of the shaft; when the shaft is rotated, this disc moves below a fixed pointer, which represents the fixed plane of the coordinate system. The remaining angle δ must be found in another way, as will be described later on.

The construction of the Pitot sphere is as follows: in a sphere of brass, or of other suitable material, having a diameter of about 12 mm, 5 small holes are drilled radially; by means of 5 borings drilled longitudinally through the stem of the sphere these holes communicate with 5 thin metal tubes, which pass through the hollow shaft of the instrument and end in connections for rubber tubings leading to a multiple manometer. The shaft

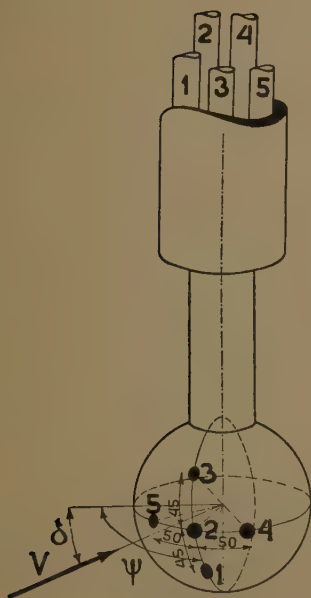


Fig. 1.

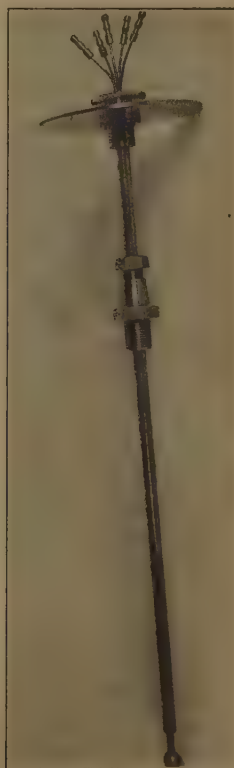


Fig. 2.

also carries the graduated disc for the determination of ψ , already mentioned before.

As the location of the pressure holes in the sphere is of great influence on the value of the constants, every Pitot sphere has to be calibrated by means of an ordinary standard Pitot tube. On account of the same reason the suitability of the instrument largely depends on the number and the location of the holes; and the present form, giving good results in a region of δ between $+60^\circ$ and -60° , was at last obtained after extensive preliminary researches¹⁾. The best results of the instrument were obtained with the pattern of holes as indicated in fig. 1: hole N⁰. 1 situated 45° below the aequatorial plane through the sphere; N⁰. 2 on the aequator and on the same meridian as N⁰. 1; N⁰. 3 45° above the equator and again on the same meridian; N⁰. 4 and N⁰. 5 are on the aequator 50° to the right, resp. to the left of N⁰. 2.

The calibration in the first place serves to control whether the position of the holes N⁰. 4 and 5 is really on the aequator, at least on the same parallel circle. When the instrument is rotated about the shaft until the pressures on these holes are equal, the value of ψ indicated by the pointer must be the same for all values of δ . Besides the angle between the plane of symmetry of these holes (which in this case coincides with the meridian plane containing the direction of the flow) and the zero direction of the scale must be determined. It is desirable that the disc is mounted in such a position on the shaft, that the angle is as nearly as possible equal to zero.

In the instrument constructed the value of ψ read off for equal pressures on holes N⁰. 4 and 5 did not vary more than $\frac{3}{4}^\circ$ to either side of the zero for angles δ ranging from $+60^\circ$ to -60° .

The calibration further must give a set of curves for:

1. the determination of the remaining angle δ , when ψ is fixed by the condition that the pressures on the holes N⁰. 4 and 5 are equal;
2. the determination of the magnitude of the velocity V ;
3. the determination of the static pressure in the fluid p .

This calibration is effectuated in the following way: the Pitot sphere is mounted in a current of uniform and constant speed V (f.i. in a wind tunnel) together with a standard Pitot tube, by means of which the value of V and that of the static pressure are determined. The arrangement of the Pitot sphere is such, that the shaft can be rotated about its own axis in order to satisfy the condition that the pressures on holes N⁰. 4 and 5 become equal, and therefore the plane of symmetry of these holes comprises the direction of the flow. In order to vary δ at will, the shaft of the sphere can be rotated moreover about an axis perpendicular to the direction of V and perpendicular to the shaft. Giving δ the required values, the differences between the pressures on each of the holes and the static pressure, as given

¹⁾ A more detailed description of these preliminary investigations will be published in "de Ingenieur".

by the side holes of the standard Pitot tube, are read on a series of manometers. These pressure differences will be proportional to $\frac{1}{2}\rho V^2$; dividing them by this quantity, they will lead to the coefficients k_1, k_2, k_3, k_4 ($=k_5$), which are independent of the velocity¹⁾ and are functions of δ only. Then the following values are calculated:

$$k_{1234} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_4} \left(= \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_4} \right) \quad \dots \quad (1)$$

$$k_{24} = k_2 - k_4 \left(= \frac{h_2 - h_4}{\frac{1}{2}\rho V^2} \right) \quad \dots \quad (2)$$

$$k_2 = \frac{h_2 - p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad \dots \quad (3)$$

in which h represents the absolute pressure as indicated by the manometer and k is the nondimensional constant. These three sets of values are plotted in a diagram as a function of δ .

The three calibration curves being available, the practical use of the

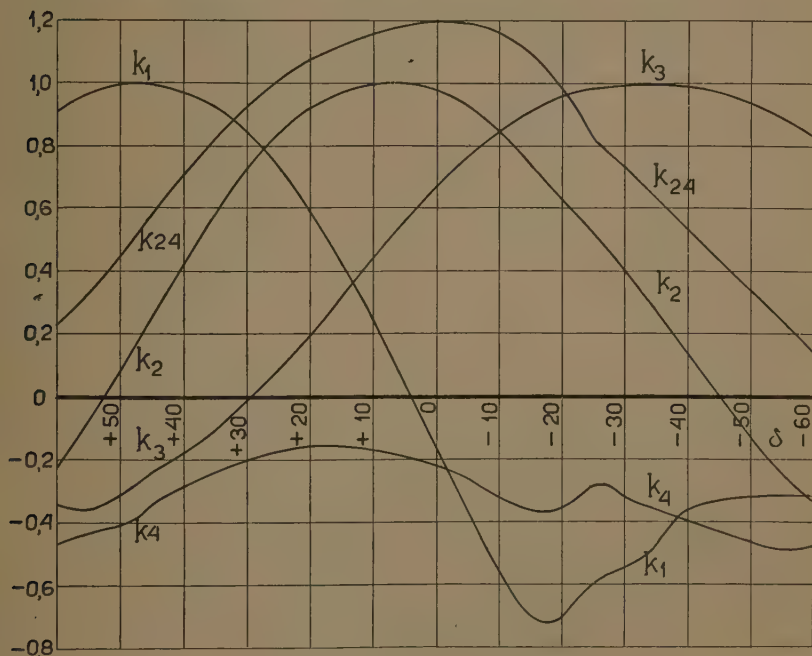


Fig. 3a.

¹⁾ The "scale effect" is investigated by H. MEYER, "de Ingenieur" 1928, N^o. 27, who determined the constants of a Pitot sphere according to BORREN in an air speed of 6, 12, 24 and 30 m/sec.; from these researches follows that in this region the constants are not affected by the velocity; the corresponding velocity of water would be 0.5—2.5 m/sec.

instrument in a flow of unknown direction, velocity and static pressure, requires the simultaneous readings of the pressures h on the holes N⁰. 1, 2, 3 and 4 in that position of the sphere in which the pressures on holes N⁰. 4 and 5 are equal, and this last condition is satisfied by rotation of the

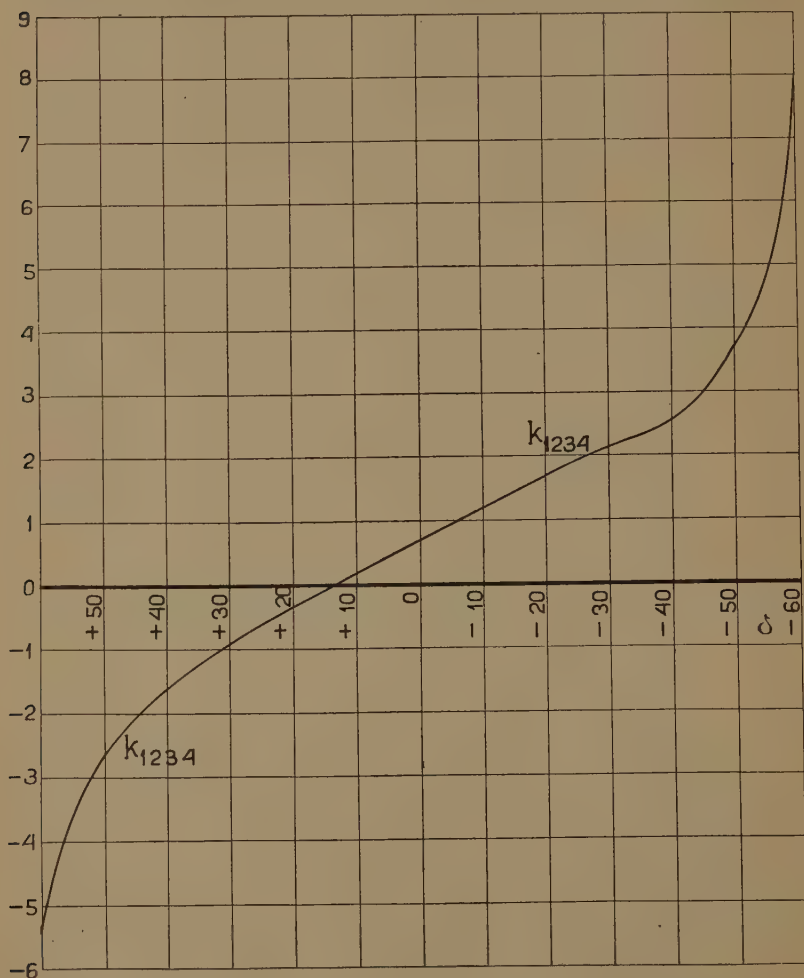


Fig. 3b.

shaft in its mounting until the pressure difference on these holes vanishes. This rotation gives immediately ψ .

Now k_{1234} is calculated from the h -values in the indicated way; this coefficient at once gives us δ . The next step is the evaluation of the magnitude of the velocity. To this end $h_2 - h_4$ is determined from the

pressure readings, which, by means of the value of k_{24} corresponding to the angle δ just found, leads to $\frac{1}{2} \rho V^2$. The remaining unknown, the static pressure p , follows from k_2 , $\frac{1}{2} \rho V^2$ and h_2 by means of relation 3).

The curves used here, including those of k_1 , k_3 and k_4 for a Pitot sphere according to fig. 1, are represented in fig. 3; the values themselves are tabulated in the accompanying table.

δ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{24}	k_{1234}
+ 60	+ 0.906	- 0.226	- 0.339	- 0.460	+ 0.234	- 5.30
+ 55	+ 0.968	- 0.077	- 0.354	- 0.421	+ 0.344	- 3.85
+ 50	+ 1.000	+ 0.088	- 0.309	- 0.407	+ 0.495	- 2.645
+ 45	+ 1.000	+ 0.260	- 0.234	- 0.339	+ 0.599	- 2.06
+ 40	+ 0.968	+ 0.425	- 0.174	- 0.279	+ 0.704	- 1.63
+ 35	+ 0.936	+ 0.586	- 0.107	- 0.242	+ 0.828	- 1.26
+ 30	+ 0.849	+ 0.725	- 0.009	- 0.204	+ 0.929	- 0.925
+ 25	+ 0.735	+ 0.836	+ 0.088	- 0.167	+ 1.003	- 0.645
+ 20	+ 0.598	+ 0.919	+ 0.200	- 0.159	+ 1.078	- 0.370
+ 15	+ 0.425	+ 0.975	+ 0.320	- 0.151	+ 1.126	- 0.093
+ 10	+ 0.245	+ 0.995	+ 0.455	- 0.159	+ 1.154	+ 0.182
+ 5	+ 0.035	+ 1.000	+ 0.568	- 0.189	+ 1.189	+ 0.450
0	- 0.181	+ 0.977	+ 0.675	- 0.219	+ 1.196	+ 0.715
- 5	- 0.368	+ 0.934	+ 0.763	- 0.256	+ 1.190	+ 0.955
- 10	- 0.549	+ 0.850	+ 0.835	- 0.324	+ 1.174	+ 1.18
- 15	- 0.700	+ 0.735	+ 0.910	- 0.361	+ 1.096	+ 1.47
- 20	- 0.700	+ 0.628	+ 0.956	- 0.354	+ 0.982	+ 1.69
- 25	- 0.595	+ 0.530	+ 0.978	- 0.279	+ 0.809	+ 1.95
- 30	- 0.549	+ 0.403	+ 0.993	- 0.324	+ 0.727	+ 2.12
- 35	- 0.475	+ 0.275	+ 0.995	- 0.354	+ 0.629	+ 2.34
- 40	- 0.354	+ 0.140	+ 0.986	- 0.399	+ 0.539	+ 2.49
- 45	- 0.331	+ 0.006	+ 0.970	- 0.429	+ 0.435	+ 3.00
- 50	- 0.324	- 0.129	+ 0.940	- 0.466	+ 0.337	+ 3.76
- 55	- 0.316	- 0.234	+ 0.894	- 0.489	+ 0.255	+ 4.76
- 60	- 0.316	- 0.331	+ 0.830	- 0.474	+ 0.143	+ 8.02

Pharmacology. — *Some analytical remarks on the vitamin A.* By Dr. Ir. S. H. BERTRAM. (Communicated by Prof. H. ZWAARDEMAKER.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

The blue colour reaction of antimoniumtrichloride in chloroformic solution with vitamin A¹⁾, which has been developed with the aid of a special Lovibond tintometer to a quantitative estimation method by ROSENHEIM and SCHUSTER²⁾, is frequently recommended in literature for this purpose³⁾. Although this method has considerable advantages over the biological tests, it has nevertheless several serious disadvantages⁴⁾. Among these we might mention:

1. The tintometer readings depend on the light.
2. The reaction mixture often becomes turbid.
3. The reaction is not quite specific.

Ad 1. To avoid the dependency of the tintometer readings on the changes of the light and the background on different days, we may recommend the use of a Philips daylightlamp (220 V—75 W), which we suspended 50 cm perpendicularly above the ocular of the tintometer. The light of the lamp was reflected by a milk-glass pane, placed in a vertical position at a distance of 25 cm from the colorimeter-tube. In this way we succeeded in obtaining concordant readings of the sample to be tested not only on different days, but as well at night.

Ad 2. The fact that the reaction mixture often becomes turbid, specially in case of extracts from organs or from physiological fluids, makes the estimation in several cases completely impossible or at least very difficult and unreliable. In literature we find WOKES⁵⁾ mentioning the clouding phenomenon.

Now it is known that water causing formation of SbOCl produces cloudiness⁶⁾, but even when every precaution is taken to exclude traces of moisture and all solutions are carefully dried over anhydrous sodium sulphate or calciumchloride, some chloroformic solutions of different origin

¹⁾ CARR and PRICE. *Bioch. J.* **20**, 497, (1926).

²⁾ ROSENHEIM and SCHUSTER. *Bioch. J.* **21**, 1329 (1927).

³⁾ Report to the League of Nations health organisation by the accessory food Committee. *The Lancet* **214**, 148 N^o. 5447 (1928).

ROSENHEIM and DRUMMOND. *Bioch. J.* **19**, 753 (1925).

LAQUEUR, WOLFF and DINGEMANSE, Ueber den Gehalt der Leber an Vitamin A (im besonderen beim Menschen) *D. m. Wochenschr.* 1928, Nr. 36.

⁴⁾ WOKES, *Bioch. J.* **22**, 997 (1928).

⁵⁾ WOKES *l.c.* p. 1002.

V. EULER and HELLSTRÖM. *Bioch. Zeitschr.* **203**, 373 (1928).

⁶⁾ WOKES, *Pharm. J.* **1**, 758 (1927).

WOKES and WILLIMOTT, *Analyst* 515 (1927).

get more or less turbid when the antimoniumtrichloride solution is added to some drops of it in such a way that comparison with the clear tintometer glasses is made practically impossible.

We found that this turbidity is caused by basic substances such as amines or traces of soaps. *The addition of some acetic anhydride* to the colorimeter tube after adding the SbCl_3 reagent, makes the solution quite limpid and allows the tintometer readings to be made easily.

The acetic anhydride of which 0.02 cc is quite sufficient, may be added in such cases by means of a Wassermannpipet. The volume of the addition is so small, that it may be neglected.

Experiments proved to us that the acetic anhydride does not influence the intensity nor the shade of the colour, as can be shown easily by the addition of 0.02 cc acetic anhydride to a clear reaction mixture, the reading taken before and after this addition remaining the same.

Ad 3. If we consider that the blue colour reaction may be obtained in various solvents, such as chlorinated hydrocarbons, aromatic and alifatic hydrocarbons and even without any solvent, it is obvious, that the medium does not play a composing part in it. In the same way the SbCl_3 may be looked upon merely as a condensation agent, as the same colour or at any rate similar colours may be obtained with a large variety of substances such as AsCl_3 , trichloroacetic acid, sulfuric acid, dimethylsulphate, acid clay, AlCl_3 , a.s.o.¹⁾. All these agents possess condensing properties. We suppose the colour to be due to a condensation product of the vitamin A with impurities (perhaps of aldehydic nature) or with itself.

Now it is quite probable that such a reaction is caused by a definite group or a special structure in the molecule of the vitamin A. So it is not surprising that some other substances, which may have some atomic groupings or a special structure of their molecule in common with the vitamin A, show the same phenomenon and have also some chemical, physical or physiological properties contributed to it. A study of a possibly large number of substances, yielding the same or a similar colour reaction, might teach us something about the most probable atomic groupings or the structure of the vitamin A. In literature we find mentioned as yielding the same blue colour reaction:

1. *Oxycholesterol*, (contrary to vitamin A) according to ROSENHEIM²⁾ does not however show the reaction when dissolved in some fatty oil (which we may confirm) nor does it show growth promoting properties. SEEL³⁾ states that oxycholesterol prevents and cures xerophthalmia. Our specimen of oxycholesterol made by treating dibromcholesterol⁴⁾ with sodium

¹⁾ ROSENHEIM and DRUMMOND, *Bioch. J.* **19**, 753, (1925).

²⁾ ROSENHEIM, *Bioch. J.* **21**, 386 (1927).

³⁾ SEEL, *Arch. f. exp. Path. u. Pharm.* **128**, 102 (1928).

⁴⁾ The dibromcholesterol carefully purified by repeated crystallisation from a mixture of ether and petrolether, showed a meltingpoint of 115.5° C. In literature we find: LIFSCHÜTZ *Z. physiol. Chem.* **114**, 286 (1921) mpt.: 93—94° C. and WINDAUS, *Z. phys. Chem.* **115**, 258 (1921) mpt.: 116—117° C.

acetate according the method of LIFSCHÜTZ¹⁾, however did not prevent xerophthalmia in a rat. A larger number of experiments with rats seems advisable to settle this point.

2. *Ergosterol* from yeast²⁾. We were not able to confirm this, on the contrary, neither purified ergosterol nor the irradiated product separated from unconverted ergosterol by means of digitonine showed a blue colour reaction with the SbCl_3 solution in chloroform. We obtained only a pink-violet colour which was very distinctly different from the ordinary blue colour produced by the vitamin A³⁾.

3. *The carotinoids*⁴⁾ in general: carotene, xanthophyll, lycopin etc. all show the CARR and PRICE reaction. Our own experiments relating to the growth promoting properties of carotene from Palmoil near completion and will be published in short.

4. *Bixine* shows the CARR and PRICE reaction as we found independently of WOKES⁵⁾ and V. EULER⁶⁾, according to whom it does not exhibit growth promoting action.

In our opinion these reactions make it probable that there must be something in common or similar in the molecular structure of vitamin A and the substances mentioned above, which fact might help to solve the problems of the preparation and the constitution of vitamin A. This similarity possibly might be the conjugated double bonds⁷⁾, as this would explain at the same time the fact that A is extremely sensitive to oxydation, and although showing reducing properties like aldehydes, (TAKAHASHI⁸⁾ even supposing it to be an aldehyde which is improbable as it resists boiling alcoholic potash) resists saponification.

We found that vitamin A as well as carotene could be brominated in petrolether solution (the brominated products not showing the blue colour reaction anymore) and be debrominated with some zinc dust and acetic acid; the resulting products then showed the CARR and PRICE reaction again. We do not in any case suggest identity of A with carotene, for not only the adsorption spectrum is quite different⁹⁾, but we found that a

¹⁾ LIFSCHÜTZ. Z. phys. Chem. **106**, 279 (1919).

²⁾ WOKES and WILLIMOTT. J. Pharm. Soc. **1**, 188 (1928).

³⁾ The ergosterol and its irradiated product were prepared and these reactions made by E. DINGEMANSE.

⁴⁾ VON EULER, v. EULER and KRANER. Helv. Chim. Acta. **12**, 278 (1929) v. EULER and HELLSTRÖM. Bioch. Z. **203**, 373 (1928).

⁵⁾ WOKES and WILLIMOTT. Pharm. J. **217** (1927).

⁶⁾ VON EULER c.s. l.c.

⁷⁾ For the constitution of bixine and carotene see:

VAN HASSELT, Doctor thesis Delft. To whom we express our thanks for some pure bixine.

FALTIS and VIEBÖCK, Ber. **62**, 701 (1929).

KUHN, Helv. Chim. Acta, **11**, 427 (1928).

KUHN, WINTERSTEIN and KARBOWITZ, Helv. Chim. Acta, **12**, 64 (1929).

⁸⁾ DRUMMOND c.s. Bioch. J. **19**, 1047 (1925).

⁹⁾ MORTON and HEILBRONN. Bioch. J. **22**, 987 (1928).

colour reaction of A vitamin in alcoholic solution with some phloroglucine and a few drops of concentrated HCl, published by SADAYUKI HAMANO ¹⁾, was given by our A vitamin preparations and not by carotene. This new reaction, usefull at it is to enable us to distinguish between A and carotene, is in our opinion not able to replace the CARR and PRICE reaction. It makes the impression of being less sensitive and as the authors themselves state that it is given by a large number of aldehydes, aliphatic and aromatic and by furfural, it is therefore even less specific than the CARR and PRICE reaction.

It is a remarkable fact that up till now of all fats analysed by us, only those containing vaccenic acid ²⁾ contained vitamin A (e.g. butter, oleo-oil, liver fats, etc.) and in those which did not show the CARR and PRICE reaction, we could not trace this acid (e.g. sesame oil, lard, etc.). This suggests a possible genetic report between vaccenic acid and vitamin A. Although such a presumption has a rather speculative character, it can be supported (at least when we suppose the A vitamin to be related with the sterols ³⁾) by the analogon that oleic acid is considered the mother substance of cholesterol (transfusion of surviving liver with oleic acid yielded cholesterol ⁴⁾ and oxydation products of oleic acid showed the LIEBERMANN cholesterol reaction ⁵⁾).

Considering that the CARR and PRICE reaction is not quite specific and knowing that that Bixine as Annatto or Orlean colour is used largely in several countries for colouring food products such as cheese, butter, margarines and oils, and that carotinoids may be present in a large variety of foods such as vegetables, carrots, oils etc., (palmoil containing much carotene is sometimes used as colouring matter) we emphasize that all *figures in literature regarding vitamin A contents of foods, oils etc., estimated by the colorimetric method, must be considered with the utmost reserve, if not at the same time the presence of bixine and carotinoids is excluded.*

The bixine is most easily got rid of, because after a simple saponification process, with alcoholic potash and subsequent dilution with water and repeated extraction of the unsaponifiable matter with petrol ether, one does not find any bixine in the extract. We recommend this procedure for the analysis of foods. The carotinoids however are not to be disposed of, their absence is certain in uncoloured extracts, but in coloured extracts we can only make parallel tests with the phloroglucine reaction for vitamin A.

We met the opinion that vitamin A from vegetable sources would not

¹⁾ SADAYUKI HAMANO. J. Agr. Chem. Soc. Japan 4, N^o. 1. The original paper was not available for us, we refer therefore to Chem. Abstr. 23, 1436 (1929).

²⁾ 11:12 elaidic acid.

BERTRAM. Bioch. Z. 197, 433 (1928).

³⁾ ROSENHEIM and WEBSTER. Bioch. J. 21, 389 (1927).

MOORE, The Lancet 216, 499 (1929).

⁴⁾ REICHER. Verhand. d. 28. Kongres f. inn. Med. Wiesbaden 1911.

⁵⁾ LIFSCHÜTZ. Z. f. physiol. Chem. 55, 1, (1908).

show the CARR and PRICE reaction. To ascertain this, we prepared an extract from green cabbage leaves in the following way :

9 KG raw material was dried in air at 50° C. The resulting dried leaves were powdered (1241 grams), ground and extracted with petrol ether (*bpt* 40—60° C), The extract after distilling of the petrol ether was saponified with alcoholic potash, the resulting soap solution after dilution with water was extracted with petrol ether. The obtained extract was washed with water and distilled of : 3.5 gram residue, *which showed the Carr and Price reaction*. It showed the phloroglucine test as well. Estimation with the method of ROSENHEIM and SCHUSTER gave 1010 U_R : 1 gr. raw cabbage corresponds to about 0.12 U_R .

From the residue we prepared a solution in sesame oil. Of this dilution we gave 4 rats daily a quantity corresponding to 1—1.2 U_R per rat per day. These tests ran parallel with 4 control rats, receiving sesame oil. All rats were kept on a *A* deficient diet with addition of vitamin *D*. 3 of the 4 rats showed normal growth, 1 died ; section showed its lungs to be ill. No rat showed any signs of xerophthalmia whereas the control rats all got this illness and did not grow. These experiments are running 32 days and are still continuing.

An other point of importance in the estimation of vitamine A, is the *calculation of the result from the tintometer readings*.

As the eye is most sensitive for slight changes in intensity for a colour not much exceeding 10 Lovibond blue units, it is advisable to make the dilution of the extract to be tested so that 0.10 cc of it produces with 1 cc $SbCl_3$ 30 % solution in chloroform, about 10 blue in the tintometer tube (readings to be taken within 30 to 60 seconds after adding the reagent).

The way in which we calculate our results, may be best demonstrated by an example :

50 cc $CHCl_3$ solution of an extract to be tested.

	Tintometerreadings	
	Yellow U	Blue U
0.10 cc + 1 cc reagent	3.0	8.2
0.15 " " "	3.2	9.4
0.17 " " "	3.3	9.9
0.20 " " "	3.5	10.6

from which we find by plotting cc against blue units on a graph, that 10 Blue corresponds to 0.175 cc.

As one ROSENHEIM Unit has to be procured by 0.10 cc and 1 cc reagent, the units present in the total 50 cc extract will be :

$$\frac{50}{0.175} \times \frac{1.175}{1.10} = 305 U_R.$$

Pharmacotherapeutic Laboratory of the University.

Amsterdam, 19 April 1929.

Hygiene. — On the so-called "daily turnover" of the *Anopheline* population in resting-places and its bearing on the evaluation of the *Anopheline* incidence, to test the effect of antilarval measures¹⁾.
By N. H. SWELLENGREBEL and W. H. DOORNBOS. (From the Institute of tropical hygiene, Amsterdam.) (Communicated by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER.)

(Communicated at the meeting of May 25, 1929).

1. *Object of the investigation.*

During the antilarval operations around the town of Medemblik (N. Holland, Netherlands) in 1927 and 1928, regular anopheline counts were made in a number of restingplaces within and outside the area under control, in order to obtain a measurement of the results. In the ordinary stables (the majority of them containing pigs) the mosquitoes were killed and counted once a fortnight; in the "experimental stables", specially constructed to facilitate observation, with 4 pigs to each stable, the *Anopheles* were counted (without catching them) twice a week. In the "shelters", i.e. open, uninhabited outhouses, the *Anopheles* were caught and counted daily.

If the data, collected in this fashion, are to be relied on, it is essential to make sure that the regular catching of *Anopheles* in the ordinary stables and shelters, does not make the subsequent findings differ from what they would have been if no catching had been going on. In other words: we should be certain that our method of measurement does not alter the thing we want to measure. Are we sure of this? The answer to this question seems to be definitely affirmative.

ROUBAUD (1920) states that the anopheline population (*A. maculipennis*) of a resting-place with an abundant foodsupply, completely repairs its losses within 24 hours, each time one catches all *Anopheles* there, so much so, that the catching seems to effect no change at all in this population. Every host attracts each night approximately the same number of ever changing mosquitoes.

BARBER and HAYNE (1924) likewise observed the complete change occurring each night in the population (*A. quadrimaculatus*) of a resting-place. They term this change "the daily turnover". Like ROUBAUD they

¹⁾ These investigations have been carried out under the auspices and with the financial support of the International Health Division of the Rockefeller Foundation

found that in resting-places where *Anopheles* had been destroyed or removed, their numbers were as large as ever on the succeeding day.

In MISSIROLI and HACKETT's (1927) observations the "turnover" is not so complete. Still, a stable where all *A. maculipennis* had been caught, became replenished after 3—6 days. Seventy-five pct. of the anopheline population leaves the stable each night.

SCHÜFFNER and HYLKEMA (1921) had arrived at a similar figure (69%) for *A. ludlowi* some years before, but, according to them, this change is due to the *Anopheles* being destroyed.

These observations are confirmed in three ways.

Firstly, by experiments to release stained mosquitoes in a stable and to ascertain how many of them may be recaptured on the following days. ROUBAUD released 2000 and did not recapture a single one after 10 days. BARBER and HAYNE, out of 4875 stained mosquitoes, recaptured 6.7, 1.1, 0.2, 0.5, 0.2, 0.02% of the original number released, on the 1st—6th day respectively. GRASSI (1920) recovered 0.9, 0.6, 0.2, 0.2, 0.15, 0.06, 0.02, 0.02, 0.04% on the 6th—14th day respectively, out of a total number of 5297 stained *A. maculipennis*¹⁾. DAVIS (1926) released 274 *A. argyritarsis* in human dwellings and recaptured 3.3%, but only on the 1st and 2nd day.

Secondly, by the high mortality of *Anopheles* compelled, by confinement, to remain in the same stable, although food and water are both available. ROUBAUD records the survival of one or two *Anopheles* out of each lot of 20, after a confinement of 10 days. BARBER and HAYNE found only one or two, out of 1100—2000, living after 6 days. NICHOLLS' (1912) mosquitoes, however, (*A. albimanus*) kept alive much longer in confinement: up to the 31st day.

Thirdly, by ascertaining the incidence of infection and the age of the oocysts among mosquitoes in houses and stables. It is taken for granted that: 1^o. If the infected mosquitoes remain in the same resting-place for a long time, they will show a high proportion of mature infections and house-infections will greatly outnumber stable-infections. 2^o. If they frequently change their abode, infected *Anopheles* will only show young oocysts in the house where they became infected and the insect carriers will be as numerous in stables as in houses or even more so. GRASSI (1920) found only 3 *A. maculipennis* with mature oocysts among 15 infected ones in prisoners barracks in Italy and SELLA (1920) noted a higher incidence of summer-infection among *A. maculipennis* in stables than in houses of the same locality. SCHÜFFNER and HYLKEMA (1922) recorded 61% of carriers of very young zygotes among infected *A. ludlowi* in houses. Still the rate of infection there was 10 times as high as in stables. The reduction of the advanced stages of infection is explained by the mortality among the mosquitoes. KLIGLER and LIEBMAN (1928), in Palestina, observed the same difference of houses and stables for *A. elutus* during the summer. But, the contrary obtains for *A. superpictus* during the autumn.

There is, consequently, strong, although not unequivocal, evidence forthcoming in favour of the universal occurrence of the "daily turnover". This would relieve us of the difficulty stated before, as it implies that repeated catches have no influence on the anopheline incidence. But some doubts occurred to us regarding the general applicability of the observations recorded here, because we were well aware that confinement is by no means fatal to all *Anopheles*.

A. maculipennis in the vicinity of Amsterdam, confined in large cages, fed daily on human blood and provided with water, survived, on an average, for a maximum of

¹⁾ He does not accept the "turnover" as an explanation of the failure to find stained *Anopheles* at a later date. According to him they have all died within that time.

16 days in June and for 34 days in August (DE BUCK, SWELLENGREBEL and SCHOUTE 1927). It is true that BARBER and HAYNE try to deal with this objection by the argument that the prolonged life in cages, as compared with that in stables, is due to the greater humidity and the absence of natural enemies. But this argument does not meet our case, because we could raise at will the mortality of *Anopheles* in our cages up to the level observed by these authors (maximum life of 4 days in June, and 9 days in August), simply by selecting as an object of observation, mosquitoes from a region different from that which provided us with the long-lived *Anopheles* mentioned above.

The longevity in confinement varies, accordingly, with the different anopheline populations kept under the same environmental conditions. May not this apply likewise to the phenomenon of the "daily turnover"? To answer this question was the object of the present investigation.

2. *Restingplaces where the "daily turnover" occurs and others where it is absent.*

We have already mentioned three types of restingplaces, but there actually are only two of them viz. the "*sheltertype*" and the "*stabletype*". In the first the male *Anopheles* are, at least, the equals of the females in number; their incidence, moreover, is not influenced by the distance from the breedingplaces. As a rule this type is limited to the localities we have termed "*shelters*", but occasionally we find a stable among them. In the second type the females outnumber the males by, at least, 2 to 1. The relative number of the males increases on the approach to the breedingplaces. This type is limited to inhabited localities, usually to stables.

As an instance, we found in the town of Medemblik, i.e. the protected centre of the area under control (July 30th—Sept. 30th), 15 % of males in "*stables*" and 63 % in "*shelters*". Outside the boundary of this area (the same period) 25 % of males in "*stables*" and 54 % in "*shelters*".

Examining representatives of both types at short intervals, without interfering in any way with their anopheline population, simply by counting the mosquitoes as they are resting on walls and ceiling, we noticed a marked difference between them.

10. *In the "stables" the anopheline numbers exhibit but little daily variations, in the "shelters" there are considerable ups and downs.* Diagram N^o. 1 shows this difference in two experimental stables, one of which belongs to the sheltertype; but the same condition obtains in the actual shelters (Diagram N^o. 1 and Table I).

The first and second column in Table I show another difference between the two experimental stables. Although they are identical as to external and internal structure and outfit, inhabitants, situation in respect of breedingplaces and of inhabited localities, the four pigs in the first stable attract each night almost twelve times as many *Anopheles* as those in the second. In this last one, *Anopheles* are conspicuously below the average of the three neighbouring experimental stables. But in another group of those stables, we have observed one, showing an average daily number of *Anopheles* more than thrice the average of the other three. We therefore believe that "the constancy with which a given host is surrounded by *Anopheles* each night in approximately the same numbers" refers to observations which should not be taken as expressing a general law.

TABLE I (see: Diagram No. 1).

Variation in the daily number of female *Anopheles* in an ordinary experimental stable and in one belonging to the "sheltertype". Both are identical in respect of construction, size, number of inhabitants (4 pigs). The third column shows the findings in three uninhabited shelters.

Date	Ordinary stable: Percent. of males; 27 0/0 average daily number of females; 1253	Stable "sheltertype". Percent. of males; 54 0/0 average daily number of females; 106	Shelters. Percent. of males; 63 0/0 average daily number of females; 58
	Daily number of females, expressed as a percentage of the above average		
Aug. 1	152	123	22
4	148	18	15
8	129	12	207
11	154	241	150
15	181	17	279
18	173	64	196
22	133	25	84
25	139	185	177
29	133	53	390
Sept. 1	136	123	59
5	128	207	112
8	105	140	107
12	87	122	24
15	54	128	5
19	—	98	52
22	18	20	5
26	12	113	3
29	10	100	0
Oct. 3	14	123	15
5	15	39	0

Note: In this table and the next one, we mention the females only, because the first restingplace differs too much from the other two (table I) or from the third one (table II) in respect of the relative number of males, to justify a comparison of the total number of *Anopheles*. A separate daily record of the males, would have materially complicated these tables, without any change in the facts they convey in their present form.

20. A "stable", from which all *Anopheles* have been removed, requires about 9 days to repair its losses; a "shelter" performs this feat within 24

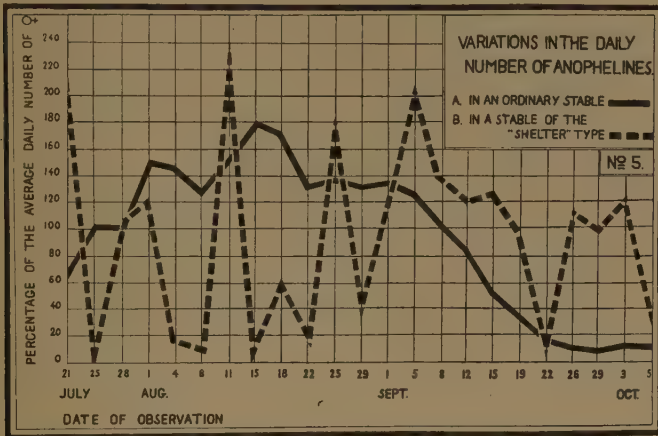


Fig. 1.

hours, often even to the point of over-compensation (Diagram No. 2 and Table II).

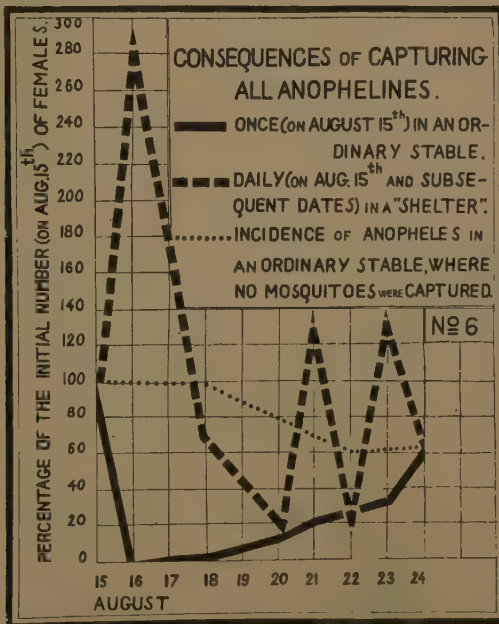


Fig. 2.

TABLE II (see: Diagram N^o. 2).

Showing the consequences of removing all *Anopheles*; a. from a stable;
b. from an uninhabited shelter.

Date (August)	a. Experimental stable; All <i>Anopheles</i> removed on Aug. 15 th		Control. Three neighbouring experi- mental stables: not interfered with		b. Uninhabited shelter: <i>Anopheles</i> removed daily	
	Number of females	Percent. of number on Aug. 15 th	Number of females	Percent. of number on Aug. 15 th	Number of females	Percent. of number on Aug. 15 th
15	4590	100	9180	100	162	100
16	0	0			475	293
17	146	3			294	181
18	174	4	9011	98	114	70
20	632	14			37	23
21	1099	24			226	139
22	1275	28	5542	60	49	30
23	1569	34			226	139
24	2861	62	5680	62	112	69

Note. 1st. In the first stable („a”) the number of females was equal to 62% of the original on Aug. 24th, and did not increase anymore after that date. The same applies to the three control stables. So we take it, that the first one, on Aug. 24th, contained as many mosquitoes as might have been expected, if not interfered with on the 15th.

2nd. The note at the foot of table I also applies to this table.

Here we find the unmistakable effect of the “daily turnover” as described by ROUBAUD and BARBER & HAYNE. Our observations completely confirm theirs. But at the same time they show that this phenomenon is only the expression of one of the (probably many) ways in which *Anopheles* behave in their restingplaces. The “daily turnover” is an extreme variant of a number of possibilities, ranging from the conditions in which a complete change in the anopheline population occurs every night, through those experienced by MISSIROLI and HACKETT (repopulation of an emptied stable completed in 3—6 days) and by ourselves (repopulation completed after 9 days), up to conditions approaching more or less those, observed at a time when the sexual activity of *Anopheles* has come to an end and they settle down, prior to hibernation or semihibernation.

This last-named condition does not belong to the breeding season and so it lies outside the scope of this paper. But it is evident that removing *Anopheles* from a stable, where

the mosquitoes have finished their sexual activity, becomes absolutely fatal to the subsequent collection of reliable data. For such a stable often remains empty, even when catching was done in early autumn only, when the weather is quite warm still and the mosquitoes feeding actively (without however developing their eggs). At such a time one is apt to forget the fundamental change which has occurred in the life of the mosquitoes. We almost committed a gross mistake, while observing in early autumn the scanty numbers of *Anopheles* in the stables just outside the area under control. We took this as an indication of the effect of our antilarval measures extending further than the boundary of this area. Only after observing a similar reduction in stables, sufficiently far away (5 km.) to render this influence imperceptible, it occurred to us, that this reduction of the mosquitoes in early autumn was due to continuing the practice of killing them each fortnight, at a time sexual activity had come to a close.

The coincidence of: 1^o. the variability of the daily numbers, 2^o. the large quantity of males, 3^o. the rapid repair of the losses consequent upon the removal of the total anopheline population, is not merely accidental, if explained on the assumption that the newly hatched *Anopheles* (which show a proportion of 50 % of males approximately) gather provisionally in the restingplaces of the "sheltertype" (taking a blood-meal or not, according to circumstances), pending further distribution among more permanent settlements.

3. *Experiments with stained mosquitoes.*

In addition to the above observations, we have carried out experiments in stables, in order to determine the length of time stained mosquitoes remain there. For this purpose all *Anopheles* were captured in four experimental stables, stained and released, each lot in its own stable¹⁾. Out of:

1950	stained females,	588	were recaptured after one	day	=	30	%.
1820	"	"	"	659	"	"	" two days = 36 %.
1650	"	"	"	45	"	"	" five " = 3 %.
2240	"	"	"	11	"	"	" ten " = 0.5 %.

For the purpose of the present investigation this result is more satisfactory than the preceding one, which showed that a stable, where *Anopheles* have been removed, requires 9 days to reestablish normal conditions. For this experiment suggests that this process goes on at a

¹⁾ In other words: each time a separate stable was reserved to ascertain the number of stained mosquitoes among the total population present in that stable on the 2nd, 5th and 10th day after the release. Other investigators determined this number in one single stable, on various dates following upon the release of the marked mosquitoes. They did so, by examining a sample only of the mosquitoes present on each one of these dates. It is evident that this difference in method will tend to raise our figures in comparison with theirs.

quicker rate, as only little of the original stock remains after 5 days¹). But we hesitate to rely on this kind of evidence so long as we do not know the effect of the staining-process on the subsequent movements of the mosquitoes subjected to it. It may inhibit their flight, but it may also render them restless; and in that case an experiment like this is very inconclusive.

4. Evidence regarding the occurrence of the "daily turnover" in human dwellings.

For our purpose, this point is less important, because we never used the Anopheline incidence in houses as a gauge of the effect of our antilarval work.

Owing to the small numbers of Anopheles in human habitations and the impossibility to perform experiments (the inhabitants do not tolerate them), the evidence adduced here is necessarily circumstantial. It is based on a comparison of houses and stables, with regard to: *a.* the incidence of males; *b.* the percentage of females with human blood; *c.* the percentage of infected females.

a. The relative number of males. — In the vicinity of Amsterdam this number, observed over a period of 9 years, during the months of June—August, is higher in houses (16%) than in stables (8%). If the coincidence of a high number of males and a short stay in the same place applies to other cases, as well as to those mentioned before, this difference points to Anopheles staying longer in stables than in houses. But the percentage of males in the latter is too low to suggest the occurrence of a "daily turnover".

b. Percentage of Anopheles with human blood in houses. — The proportion of the Anopheline incidence in houses and stables is about 1:200 in the vicinity of Amsterdam, the average number per house is ten approximately. Assuming that all mosquitoes, which are found of a morning in a given house and which contain recently ingested blood, can only have bitten the inhabitants of that particular house and ought, therefore to be excluded from the present consideration, the odds against mosquitoes with "black blood" in their stomachs (i.e. an almost digested bloodmeal taken at some earlier night) having entered this house, after leaving some other human habitation and not some stable, are as 200:1 in rural areas. If a "daily turnover" occurs, mosquitoes with "black blood" ought to show the human precipitin test very rarely, thrice in 200 approximately, allowing for an incidence of 0.7% of engorged mosquitoes, with human blood, in stables. As a matter of fact, 69% of these mosquitoes were found to contain human blood²). So the majority of them must have stayed at least two nights in the same house.

c. Infected mosquitoes in houses. — Infected mosquitoes are extremely rare in houses from April—August (SWELLENGREBEL 1922, 1924). This fact suggests that, in summer, they remain less than four days (i.e. the average time necessary for young zygotes to grow to a size observable in ordinary routine-examination³) in the house, where they

¹) It is not even certain, that the stained mosquitoes, found after 5 and 10 days, actually stayed there all the time and did not return to the same spot after some flight, actuated by the (hypothetical) "homing instinct".

²) Eliminating the reactions with negative result, this figure increases to 89%. Anopheles with recently ingested blood show the human precipitin-reaction in 86% of the cases (88% without the negatives). This suggests that the mosquitoes remain in the house where they took their blood-meal, during the time it takes to digest it (3–4 days under the prevailing conditions).

³) This average was established experimentally, under optimal conditions as to temperature. SCHÜFFNER and HYLKEMA (1921) arrived at the same figure, working with *A. ludlowi* in the tropics. So our figure is probably too low.

acquired their infection. That we do not recover them in stables is no wonder, considering the enormous numbers of mosquitoes, among which they are hiding there. During the autumn and winter, when sexual activity has stopped, and mosquitoes remain where they are, we find 5–6% of infected *Anopheles* in houses of malarious localities, with a gradual increase of the proportion of mature infections, from 44% in October and 61% in November, to 87% in December. During the same period, they are very rare in stables (0.16%). These conditions are the exact opposite of those in Palestine, described by KLIGLER and LIEBMAN (1928) where infected *A. elutus* are confined to houses in summer but migrate to stables prior to hibernation.

The circumstantial evidence summarised here does not, as a whole, support the view, that the "daily turnover" is of common occurrence among *A. maculipennis*, visiting houses in this country. Although the relative number of males suggests that the length of time they stay in houses is inferior to that in stables, it is longer than one day and may be approximately set down at three or four.

5. Summary.

We take the safer course, to disregard the experiments with stained mosquitoes altogether, and to accept the evidence that the consequences of catching *Anopheles* in an ordinary stable extend over a period of nine days. In that case our method of testing the effect of antilarval measures (by comparing the anopheline density, within the protected centre of the area subjected to these operations, with that in the region outside this area) needs not be discredited. For daily catches were carried out in the "shelters" only, and these showed the unmistakable symptoms of the "daily turnover". In the stables the catches were either limited to once a fortnight or we did without them altogether.

But with a view to the custom in experimental stations, to rely on daily catches of mosquitoes, in order to establish the local anopheline density or to check the results of antilarval measures, it seems worth while to consider the results of the present inquiry. To prevent the observations becoming unreliable as a consequence of their being repeated too often, it is essential to ascertain: 1^o, the type of the various restingplaces selected as the objects of the routine observations, with regard to the occurrence of the "daily turnover"; 2^o, the physiological status of the *Anopheline* population concerned in the investigation, whether sexually active, still feeding after the close of sexual activity, or completely inactive.

REFERENCES.

- BARBER and HAYNE (1924). Some observations on the dispersal of adult *Anopheles*. U. S. Publ. Health Repts. Washington D.C., 39, No. 5, pp. 195–203.
- DAVIS (1926). Study on the dispersion of resting *Anopheline* mosquitoes from dwellings in Brazil. *Americ. Jrl. of Hygiene*. Baltimore Md., 6, March suppl., pp. 23–35.
- GRASSI (1920). Osservazioni sulla vita degli Anofeli. *Rendic. R. Accad. Lincei, Class. fis. mat. e nat.*, Roma, Ser. 5a, 29, 2a sem., No. 10/11, pp. 307–313, 339–344.
- KLIGLER and LIEBMAN (1928). Changes in the restingplaces of *Anopheles*, with special reference to infected mosquitoes. *Jrl. of Prevent. Medic.*, 2, No. 5, pp. 433–440.
- MISSIROLI and HACKETT (1927). La regressione spontanea della malaria in alcune regioni d'Italia. *Riv. di Malariologia*, Roma, 6, No. 2, pp. 193–243.

NICHOLLS (1912). Some observations on the bionomics and breedingplaces of *Anopheles* in Santa Lucia, Brit. W. Indies. *Bullet. Entomol. Res.*, London, **3**, pp. 251—267.

ROUBAUD (1920). Les conditions de nutrition des *Anophèles* en France. *Ann. de l'Inst. Pasteur*, Paris, **34**, N^o. 4, pp. 181—228.

SCHÜFFNER und HYLKEMA (1921). Die Malaria-Epidemie in Naras im Jahre 1918. *Meded. Burg. Geneesk. Dienst*, in Nederl. Indië, Weltevreden (Java), jaarg. 1921, N^o. 1, pp. 49—92.

SCHÜFFNER en HYLKEMA (1922). De malaria te Belawan tijdens den aanleg van de oceaanhaven van af 1918 (Malaria at B. during the construction of the new docks, executed since 1918). *Ibid.*, jaarg. 1922, N^o. 1, pp. 51—82.

SELLA (1920). The antimalaria campaign at Fiumicino (Rome). *Internat. Jrl. of Publ. Health*, Geneva, **1**, N^o. 3, pp. 316—346.

SWELLENGREBEL (1922). Fréquence saisonnière des *Anophèles* impaludés aux environs d'Amsterdam. *Bullet. de la Soc. de Path. Exot.*, Paris, **15**, N^o. 2, pp. 116—119.

——— (1924). Nadere bijzonderheden over de herfst- en winterbesmetting met malariaparasieten van *A. maculipennis* om Amsterdam (Further particulars on malarial infection during autumn and winter of A.m. in the vicinity of A.). *Nederl. Tijdschr. v. Geneesk.*, Haarlem (Holland), **68**, 2nd half, N^o. 6, pp. 750—763.

SWELLENGREBEL, DE BUCK and SCHOUTE (1927). Studies on anophelism without malaria in the vicinity of Amsterdam. *Bullet. Entomol. Res.*, London, **17**, N^o. 4, pp. 351—371.

CORRIGENDUM

In Prof. WEEVERS' article *Die Funktion des Koffeins im Stoffwechsel von Ilex paraguariensis St. Hil.* (These Proceedings Vol. 32 N^o. 3) line 14, p. 283, erroneously has been put in type twice and to line 16 (line 15 now in the corrected page) the author wishes to add some words. After correction the paragraph ought to be read as follows:

Sowie bei meinen früheren Arbeiten war es auch bei der Matepflanze meine Absicht das Vorkommen des Koffeins mikrochemisch mit Hilfe der Methode BEHRENS ¹⁾ zu studieren. Im Gegensatz zu den andern Objekten, hat diese Methode jedoch bei der Matepflanze den Nachteil, dass sich beim Sublimieren ein ölartiger, nicht auskristallisierender Beschlag bildet. Besonders war dies der Fall bei Untersuchung des in Brasilien gesammelten Materials, dagegen gab das eines paraguariensis Exemplars des Amsterdamer botanischen Gartens stets einen gut kristallisierenden Beschlag. Vielleicht liegen hier Varietätsunterschiede vor; nach den anatomischen Bestimmungstabellen LENDNERS ²⁾ gehört alles Material zu *Ilex paraguariensis St. Hil.*

DATE DUE

GAYLORD

PRINTED IN U.S.A.